Cálculo C - Lista 6

Teorema de Green

Determine $\int_\gamma M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ onde γ é orientada no sentido anti-horário.

1. $\int_\gamma y\,dx$, onde γ a curva no primeiro quadrante formada por parte do círculo $x^2+y^2=4$ e dos intervalos $[0,2]$ nos eixos x e y.

2. $\int_\gamma xy\,dx + (x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{3}{2}})\,dy$, onde γ é borda do quadrado com vértices $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$.

3. $\int_\gamma (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx + (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dy$, onde γ é o círculo $x^2+y^2=1$.

   Use o teorema de Green para calcular a integral de linha. Assuma que cada curva é orientada no sentido anti-horário.

4. $\int_\gamma e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy$ onde γ é composta de parte do gráfico de $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$ e dos intervalos $[0,25]$ nos eixos x e y.

5. $\int_\gamma xy\,dx + (\frac{1}{2}x^2+xy)\,dy$ onde γ é composta do intervalo $[-1,1]$ sobre o eixo x e a parte de cima da elipse $x^2+4y^2=1$.

6. $\int_\gamma (\cos^3 x + e^x)\,dx + e^y\,dy$ onde γ é o gráfico de $x^6+y^8=1$.

   Nos exercícios a seguir use o teorema de Green para calcular as integrais de linha $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde γ é orientada no sentido anti-horário.

7. $\vec{F}(x,y) = y\vec{i} + 3x\vec{j}$ onde γ é o círculo $x^2+y^2=4$.

8. $\vec{F}(x,y) = y\sin x\,\vec{i} - \cos x\vec{j}$ onde γ é composta do semi-círculo $x^2+y^2=9$ com $y\geq 0$ e a linha $y=0$ com $-3\leq x\leq 3$.

   Nos exercícios a seguir use o teorema de Green para encontrar a área da região dada.

9. A região limitada pelo eixo y, a linha $y=\frac{1}{4}$ e a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \sin \pi t\,\vec{i} + t(1-t)\,\vec{j}$ com $0\leq t\leq \frac{1}{2}$.

10. Sejam

$$M(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad N(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

(a) Verifique que

$$\int_\gamma M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \int_D dA\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

onde D é a região limitada pelos círculos: $x^2+y^2=4$ orientado no sentido anti-horário e $x^2+y^2=1$ orientado no sentido horário.

(b) Mostre que

$$\int_\gamma M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy \neq \int_D dA\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)$$

onde D é o disco cuja borda é o círculo $x^2+y^2=1$.

(c) O resultado em (b) viola o teorema de Green? Explique.

11. Assuma que D é uma região do plano. Sejam γ_1 e γ_2 curvas suaves fechadas em D ambas orientadas no sentido anti-horário. Suponha que $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$ em D. Use o teorema de Green para mostrar que

$$\int_{\gamma_1} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = \int_{\gamma_2} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$$

12. (a) Seja γ o segmento de reta no plano unindo os pontos (x_1,y_1) e (x_2,y_2). Mostre que

$$\frac{1}{2}\int_\gamma x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1)$$

(b) Considere um polígono orientado no sentido anti-horário cujos vértices são $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$. Usando a parte (a) mostre que a área do polígono é dada por

$$A = \frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1) + \frac{1}{2}(x_2y_3 - x_3y_2) + \ldots + \\ + \frac{1}{2}(x_{n-1}y_n - x_ny_{n-1}) + \frac{1}{2}(x_ny_1 - x_1y_n)$$

(c) Encontre a área do quadrilátero com vértices $(0,0),(1,0),(2,3),(-1,1)$.

Respostas

1. $-\pi$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. 0 4. 0
5. $\frac{1}{6}$ 6. 0 7. π 8. 0,
9. $\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2}$ 10. Não 12. (c) 4