Introdução a Análise - Prova 1

1. (i) Seja (M, d) um espaço métrico. Mostre que

$$|d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y'), \quad \forall x, x', y, y' \in M$$ 0.5

(ii) Seja $b(x,y) := \max\{1, d(x,y)\}$, com $d(x,y) = \sqrt{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2}$. Verifique se b é uma métrica em R^n.
$\sqrt{(x^1-y^1)^2 + \ldots + (x^n-y^n)^2}$ 0.5

2. Seja $A \subset R^n$. Define-se a distância de $x \in R^n$ ao conjunto A como sendo $d(x; A) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}$. Mostre que 2.0

$$d(x; A - \{x\}) = 0 \Leftrightarrow x \in A'$$

3. Mostre que $(\text{int}A)^c = \overline{A^c}$

4. Seja $A \subset R^n$. Mostre que ∂A é fechado. 2.0

5. Sem usar o teorema de Heine-Borel mostre que se $K \subset R^n$ é compacto e $F \subset K$ é fechado então F é compacto em R^n. 1.0

6. Sem usar o teorema de Heine-Borel mostre que $\Omega := \{(x,y) \in R^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ não é compacto. 1.0

Resultados permitidos

$\overline{S} = \text{int}\, S \cup \partial S$

$\text{int}\, S \subset S$

$S \subset \overline{S}$

$R^n = \text{int}\, S \cup \partial S \cup \text{int}\,(R^n - S)$

1.

i) (M,d) : espaço métrico

$$\underline{|d(x,y) - d(x',y')|} = |d(x,y) + d(y,x') - d(y,x') - d(x',y')|$$

$$\leq |d(x,y) + d(y,x')| + |d(y,x') + d(x',y')|$$

$$= \underline{d(x,x') + d(y,y')}$$

$$\therefore \quad |d(x,y) - d(x',y')| \leq d(x,x') + d(y,y')$$

ii) $b(x,y) = \text{Max}\{1, d(x,y)\}$

Temos $b(x,x) = \text{Max}\{1, d(x,x)\} = \text{Max}\{1,0\} = 1$

i.e. $(b(x,x) \Longrightarrow x = 0)$ é falso,

logo b não é métrica em $\mathbb{R}^n$.

2.

$(\Rightarrow)$ $d(x; A-\{x\}) = 0$.

$\therefore$ $\text{Inf}\{d(x,a) : a \in A-\{x\}\} = 0$ (*)

$\therefore$ $0 \leq d(x,a) \quad \forall a \in A-\{x\}$

Seja $\mathring{B}(x;\delta)$.

Suponha que $\mathring{B}(x,\delta) \cap A = \phi$. (**)

Então temos que $0 < \delta \leq d(x,a)$, $\forall a \in A-\{x\}$

o que contraria (*).

Assim (**) é falso, i.e.

$\mathring{B}(x;\delta) \cap A \neq \phi$

$\therefore$ $x \in A'$.

$(\Leftarrow)$ Seja $x \in A'$.

Suponha que $\text{Inf}\{d(x,a) : a \in A-\{x\}\} > 0$. (***)

Seja $\delta = \text{Inf}\{d(x,a) : a \in A-\{x\}\}$

$\therefore$ $\delta \leq d(x,a) \quad \forall a \in A-\{x\}$ (4*)

Considere então $\overset{\circ}{B}(x;\delta)$.

De (**) temos que $\overset{\circ}{B}(x;\delta) \cap A = \phi$

isto é $x \notin A'$

o que contraria a hipótese de que $x \in A'$.

Logo deve ter (***) como

$$\inf \left\{ d(x,a) : a \in A - \{x\} \right\} = 0$$

$$\therefore \quad d(x, A - \{x\}) = 0$$

3. $\overline{A^c} = \text{int}\, A^c \cup \partial A^c$

→ Seja $x \in (\text{int} A)^c$ $(*)$

$\therefore$ $x \notin \text{int}\, A$ $\underline{\underline{(1)}}$

$\therefore$ $\forall B(x;\delta)$, $B(x;\delta) \cap A^c \neq \emptyset$

$\therefore$

$\underline{\underline{(2)}}$ $B(x;\delta) \subset A^c$

ou

$\underline{\underline{(3)}}$ $\begin{cases} B(x;\delta) \cap A^c \neq \emptyset \\ \text{e} \\ B(x;\delta) \cap A \neq \emptyset \end{cases}$

Se valer (2) então $x \in A^c \subset \overline{A^c}$

$\therefore$ $x \in \overline{A^c}$ $\underline{\underline{(4)}}$

Se valer (3) então $x \in \partial A^c$

$\therefore$ $x \in \text{int} A^c \cup \partial A^c = \overline{A^c}$

$\therefore$ $x \in \overline{A^c}$ $\underline{\underline{(5)}}$

De (4) e (5) : $(\text{int} A)^c \subset \overline{A^c}$ $\underline{\underline{(6)}}$

→ Seja

$$x \in \overline{A^c} = \text{int}\, A^c \cup \partial A^c$$

Suponha que $x \notin (\text{int}A)^c$

$\therefore x \in \text{int}\, A$

$\therefore \exists B(x;\delta) \subset A$

Mas, se $B(x;\delta) \subset A$ então $x \in A$

$\therefore x \notin A^c \supset \text{int}\, A^c$

$\therefore x \notin \text{int}\, A^c$. (7)

Também

se $B(x;\delta) \subset A$ então $B(x;\delta) \cap A^c = \phi$

$\therefore x \notin \partial A^c$ (8)

De (7) e (8) : $x \notin \underbrace{\text{int}A^c \cup \partial A^c}$

$\therefore x \notin \overline{A^c}$

o que é absurdo.

Logo devemos ter $x \in (\text{int}A)^c$

$\therefore \overline{A^c} \subset (\text{int}A)^c$ (9)

De (6) e (9) : $\boxed{(\text{int}A)^c = \overline{A^c}}$

4. ∂A é fechado.

Seja $x \in (\mathbb{R}^n - \partial A)$

$\therefore \quad x \notin \partial A$

$$\therefore \quad \exists B(x;\delta) : \begin{cases} B(x;\delta) \subset A & (1) \\ \quad \text{ou} \\ B(x;\delta) \subset A^c & (2) \end{cases}$$

Suponha que $\quad B(x;\delta) \cap \partial A \neq \emptyset \qquad (3)$

e seja $\quad y \in B(x;\delta) \cap \partial A. \qquad (4)$

De (4) : $\forall B(y;\delta')$, $\quad B(y;\delta') \cap A^c \neq \emptyset \quad (5)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad$ e $\quad B(y;\delta') \cap A \neq \emptyset \quad (6)$

Tomando δ' suficientemente pequeno de modo que $B(y;\delta') \subset B(x;\delta)$ temos então de (5),(6) que $\quad B(x;\delta) \cap A^c \neq \emptyset$

e $\quad B(x;\delta) \cap A \neq \emptyset$

$\therefore \quad B(x;\delta) \not\subset A^c$

e $\quad B(x;\delta) \not\subset A$

o que contraria (1) e (2), logo (3) é falso

i.e. $\quad B(x;\delta) \cap \partial A = \emptyset$

$\therefore \quad B(x;\delta) \subset \mathbb{R}^n - \partial A \Rightarrow \mathbb{R}^n - \partial A$ é aberto $\Rightarrow$

∂A é fechado.

5. Seja

$K \subset \mathbb{R}^n$ compacto ①

$F \subset K$ fechado ②

Seja $\mathcal{G} = \{U_\alpha\}$ cobertura de F

De ② : F^c é aberto

Mas $\bigcup_\alpha U_\alpha \supset F$

$\therefore \quad F^c \cup \left(\bigcup_\alpha U_\alpha\right) = \mathbb{R}^n$

Seja então $\mathcal{G}_K = \{U_\alpha ; F^c\}$ cobertura de K.

Sendo K compacto, $\exists\ \mathcal{G}'_K = \{U_{\alpha'}, F^c\}$ cobertura finita de K

$\therefore \quad \left(\bigcup_{\alpha'} U_{\alpha'}\right) \cup F^c \supset K \supset F$

Logo $\mathcal{G}' = \{U_{\alpha'}\}$ é cobertura finita de F

$\therefore$ F é compacto

6.

$$\Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \geq 1 \}$$

Seja

$$\mathcal{G} = \{ B(0;n) \}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$B(0;n) = \{ y \in \mathbb{R}^n : d(0,y) \leq 1 \}.$$

→ Temos que $\underline{\mathcal{G} \text{ cobre } \Omega}$.

De facto, seja $(x,y) \in \Omega$.

Tome $n \in \mathbb{N}$ tq. $n > \sqrt{x^2+y^2}$.

Então, $d((0,0),(x,y)) = \sqrt{x^2+y^2} < n$

$\therefore$ $(x,y) \in B((0,0);n)$

→ Seja $\mathcal{G}' = \{ B((0,0);n_1), \ldots, B((0,0);n_k) \} \subset \mathcal{G}$.

Seja $n_0 = \max \{ n_1, \ldots, n_k \}$

Tem-se que $B((0,0);n_0) \supset \bigcup_{i=1..k} B((0,0),n_i)$

No entanto, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ com $\sqrt{x^2+y^2} > n_0$

teremos que $(x,y) \notin B((0,0);n_0)$ $\therefore$

$\mathcal{G}'$ não cobre Ω.

$\therefore$ Ω não é compacto.