Matemática 1 (Economia) - Prova 1 b

Nome:

1. Determine a equação da reta que passa pelos pontos $P(0,3)$, $Q(8,2)$. Passa esta reta pelo ponto $(2,5)$? Justifique sem usar gráfico. **[1 ponto]**

2. Usando a definição de módulo, faça o gráfico de $y = |3 - x|$. **[1.5 ponto]**

3. Obtenha a expressão de uma função quadrática que tenha concavidade para baixo, corte o eixo y em $y = 2$ e passe pelo ponto $(2,3)$. Para esta função, calcule ainda as coordenadas de seu vértice.
[Obs: $V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a})$] **[1 ponto]**

4. Determine o domínio da função **[1.5 ponto]**:
$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

5. Seja a função $h = \log_{10}\left(\frac{4-x^2}{x^2-16}\right)$.
(i) Verifique se é possível escrever h como a composta de duas funções u e v tal que $h(x) = v(u(x))$. Se for, determine v e u. **[0.5 ponto]**
(ii) Determine o domínio de h. **[1 ponto]**

6. (i) Sob que condições duas funções são iguais? **[0.5 ponto]**
(ii) Sejam as funções $f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-1}}$, $g(x) = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}}$. Elas são iguais? Justifique. **[1 ponto]**

7. Seja a função
$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 2^x & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$
(i) Faça o gráfico de f. **[1 ponto]**
(ii) Descreva, caso existam, os intervalos onde esta função é estritamente crescente, estritamente decrescente, crescente ou decrescente. **[1 ponto]**

Matemática I (Economia) - Prova 1 (b)

1. Seja $y = ax + b$

$P(0,3) \in$ reta $\Rightarrow$ $//3 = b//$

$Q(8,2) \in$ reta $\Rightarrow$ $2 = 8a + b$

$\therefore$ $2 - 3 = 8a$

$8a = -1$

$\therefore$ $//a = -\frac{1}{8}//$

$\therefore$ $\boxed{y = -\frac{1}{8}x + 3}$ (0.5)

Escrever $y = -\frac{1}{8}x + \ldots$ 0.3

$(2,5)$ pertencerá a reta se tivermos

$5 = -\frac{1}{8} \cdot 2 + 3$

$5 = -\frac{1}{4} + 3$

$5 = +\frac{11}{4}$

o que não é verdade.

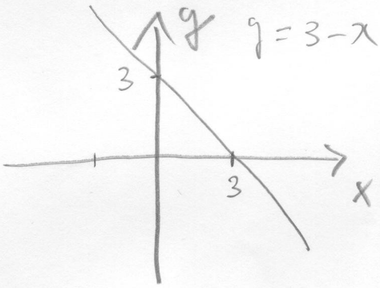
$\therefore$ $\boxed{(2,5) \text{ não é ponto da reta}}$ (0.5)

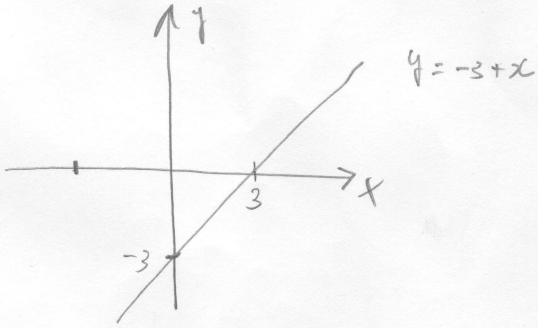
2.

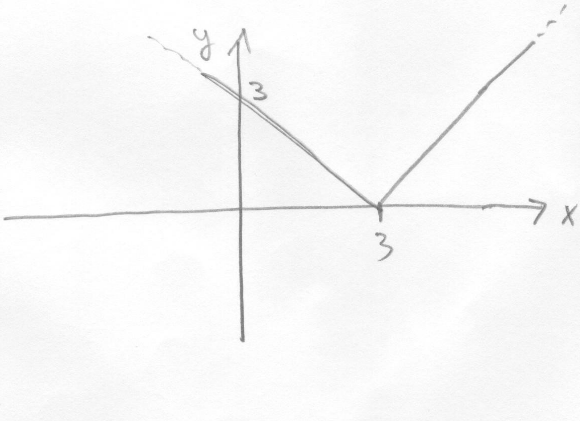
$$y = |3-x| = \begin{cases} 3-x & x \quad 3-x > 0 \\ -3+x & x \quad 3-x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \; |3-x| = \begin{cases} 3-x & x \quad 3 > x \\ -3+x & x \quad 3 < x \end{cases}$$

(0.5)







(1.0)

3.

$y = ax^2 + bx + c$

Corta o eixo y em $y=2$, i.e. no ponto

$(0,2) \Rightarrow \quad 2 = a.0 + b.0 + c$

$\therefore \quad \underline{c = 2}$

Passa pelo ponto $P(2,3) \Rightarrow$

$3 = a.4 + 2b + c$

$3 = 4a + 2b + 2$

$\therefore \quad 4a + 2b = 1 \quad (*)$

Concavidade p/ baixo $\Rightarrow \quad a < 0$.

Seja então $\underline{a = -1}$.

temos de $(*)$:

$-4 + 2b = 1$

$2b = 5$

$\underline{b = \frac{5}{2}}$

$\therefore \quad \boxed{y = -x^2 + \frac{5}{2}x + 2}$.

$\underline{(0.8)}$

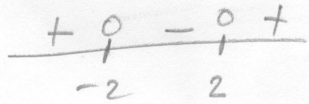
Vértice : $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{5/2}{-2}, -\frac{\frac{25}{4}+8}{-4}\right)$

$= \left(\frac{5}{4}, \frac{57}{16}\right)$ (0,2)

4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} - \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}}$

Devemos ter

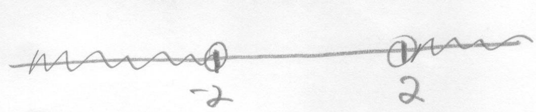
$x^2+2x-3 > 0$ $\quad \underline{\underline{e}} \quad$ $x^2-4 > 0$



$\therefore \quad (-\infty,-3) \cup (1,+\infty) \quad \underline{\underline{e}} \quad (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$] 0.5

$\therefore$

$\underline{\underline{e}}$



$\therefore \quad \boxed{\text{Dom } y = (-\infty,-3) \cup (2,+\infty)}$ $\quad \underline{(1.0)}$

__Obs:__ Determinar um dos domínios corretamente
$\underline{\therefore +0.5}$

5. $h = \log_{10}\left(\frac{4-x^2}{x^2-16}\right)$

i) $h(x) = v(u(x))$

$$\begin{cases} v(x) = \log_{10} x \\ u(x) = \dfrac{4-x^2}{x^2-16} \end{cases}$$

0.5

ii) $x \in \text{Dom}\, h \iff \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x^2-16} > 0 \quad (*) \\ x^2-16 \neq 0 \end{cases}$

De (*) :

x		-4		-2		2		4	
$4-x^2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2-16	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{4-x^2}{x^2-16}$	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

$$\boxed{\text{Dom}\, h = \{ x \in \mathbb{R} : -4 < x < -2 \text{ ou } 2 < x < 4 \}}$$

(1,0)

6.

i) Duas funções f e g são iguais se:

0.5 $\begin{cases} \text{Domínio } f = \text{Domínio } g \\ f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in \text{Dom} f = \text{Dom} g \end{cases}$

ii)

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-1}} \quad , \quad g(x) = \frac{\sqrt{2x}}{\sqrt{x-1}}$$

Temos:

$$x \in \text{Dom} f \iff \frac{2x}{x-1} \geq 0 \quad \text{e} \quad x-1 \neq 0$$

$\therefore$

		0		1		
$2x$	$-\,-$	0	$+$	$+$	$+$	e $x \neq 1$
$x-1$	$-\,-$	$-$	$-$	0	$+\,+$	e $x \neq 1$
$\frac{2x}{x-1}$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	e $x \neq 1$

$\therefore$ $\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ ou } x > 1\}$

$= (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$

$x \in \text{Dom } g \Leftrightarrow \quad 2x \geq 0 \quad e \quad x-1 > 0$

$\therefore \quad x \geq 0 \quad e \quad x > 1$

$\therefore \quad \text{Dom } g = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$

Os domínios são distintos, logo

$f \neq g$.

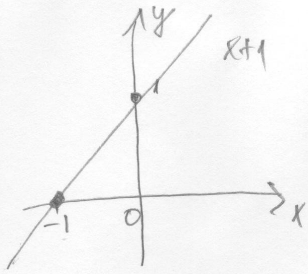
<u>Pontuação</u>:

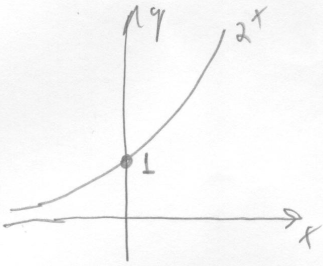
Calcular um dos domínios corretamente: <u>0.3</u>

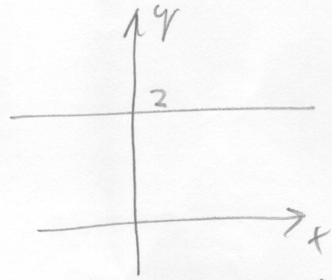
Calcular os dois domínios corretamente mas errou a conclusão: <u>0.6</u>

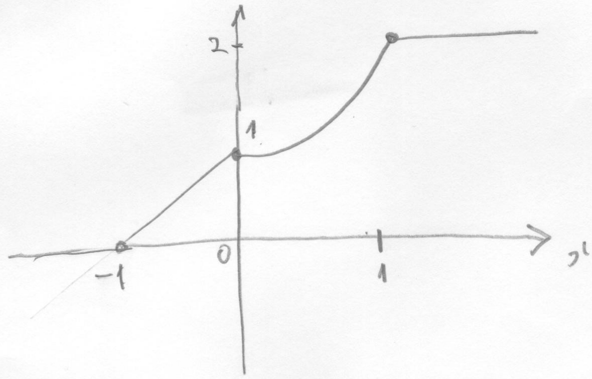
7.

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x \leq 0 \\ 2^x, & 0 < x \leq 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$









alguma parte correcta: 0.3
duas partes correctas: 0.5

(1.0)

ii) f é estritamente crescente: $(-\infty, 1)$ 1/3

f é crescente: $(-\infty, +\infty)$ 1/3

f não é decrescente 1/3

Obs.: Se o gráfico em (i) estiver errado, a análise da parte (ii) vale apenas metade, i.e. 0.5.