Pré-Cálculo - Prova 1

Nome:

1. Seja $A = \{2\}$, $B = \{\{2\}\}$, $C = \{2, \{1\}\}$. Verifique se cada uma das proposições a seguir é verdadeira (V) ou falsa (F). Nas proposições falsas modifique a proposição de modo a torná-la verdadeira. **[1.5 ponto]**

$(a)\ 2 \in A$	$(b)\ 2 \subset A$	$(c)\ 2 \subset C$	$(d)\ A \subset C$
$(e)\ A \in C$	$(f)\ 2 \in B$	$(g)\ 2 \subset B$	$(h)\ A \in B$
$(i)\ A \subset B$	$(j)\ B \subset C$	$(k)\ B \in P(C)$	$(l)\ B \subset P(C)$
$(m)\ A \in P(C)$	$(n)\ A \subset P(C)$		

Obs: $P(C)$ é o conjunto das partes de C.

2. Dados os conjuntos $A = \{2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5\}$ determine o conjunto C tal que $A \cap C = \{2\}$, $B \cap C = \{4\}$ e $A \cup B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. **[1 ponto]**

3. Seja $x \in R$ um número real não nulo. Mostre que $x + x \neq 0$. **[2 pontos]**

4. Seja $0 < x$ e $x < y$. Mostre que $0 < y$. **[2 pontos]**

5. (a) Dê um exemplo de um conjunto de números reais que tenha supremo, nao tenha máximo elemento, e tenha menor elemento. **[0.5 ponto]**
(b) Seja $X = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \cdots\} \cup \{10\}$. Determine, caso existam, $\sup X$, $\inf X$. **[1 ponto]**

6. Seja $X \subset R$. Dado $r > 0$, defina um novo conjunto $rX := \{r \cdot x \,|\, x \in X\}$.
(i) Mostre que se X é limitado superiormente então rX também é limitado superiormente e tem-se $\sup(rX) = r \sup X$ **[1.5 ponto]**.
(ii) Se X é limitado superiormente e $r < 0$, podemos dizer que rX é limitado superiormente? Explique. **[0.5 ponto]**

Pré-Cálculo - Prova 1

1.

a) V

b) F ; $2 \in A$ ou $\{2\} \subset A$

c) F ; $2 \in C$ ou $\{2\} \subset C$

d) V

e) F ; $A \subset C$ ou $2 \in C$

f) F ; $\{2\} \in B$

g) F ; $\{2\} \in B$

h) V

i) F ; $A \in B$

j) F ; $2 \in C$, $\{2\} \subset C$

k) F ; $B \subset P(C)$

l) V

m) V

n) F ; $A \in P(C)$ ou $A \subset C$

$P(C) = \{\phi, \{2\}, \{\{1\}\}, \{2, \{1\}\}\}$

2. $\begin{cases} A = \{2,3\} \\ B = \{3,4,5\} \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{lll} A \cap C = \{2\} & \Longrightarrow & \begin{array}{l} 2 \in C \\ 3 \notin C \end{array} \\ & & \\ B \cap C = \{4\} & \Longrightarrow & \begin{array}{l} 4 \in C \\ 3 \notin C \\ 5 \notin C \end{array} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \{2,4\} \subset C \\ \{3,5\} \cap C = \phi \end{array}$$

$A \cup B \cup C = \{2,3,4,5,6\}$

Como vejo que $6 \notin A$
$\qquad\qquad\qquad 6 \notin B$

deduzimos ter $6 \in C$.

Assim C deve ser tal que se tenha

$$\boxed{\begin{array}{c} \{2,4,6\} \subset C \\ 3 \notin C,\ 5 \notin C \end{array}}$$

Ex. $\boxed{C = \{2,4,6\}}$

3. Seja $x \neq 0$ (1)

Suponha $x + x = 0$ (2)

De O4. : $0 \leq x \;\vee\; x \leq 0$ (3)

Seja $0 \leq x$. (4)

De I, II : $0 + x \leq x + x$

De A.1, (2) : $x \leq 0$ (5)

De (4), (5) e O.2 : $x = 0$

o que é um absurdo pois contraria a hipótese da linha (1).

Logo, em (3) devemos ter

$x \leq 0$ (6)

De I, II : $x + x \leq 0 + x$

De (2), A.1 : $0 \leq x$ (7)

De (6), (7), O2 : $x = 0$

o que é um absurdo pois contraria a hipótese da linha (1).

Qualquer que seja o caso $0 \leq x \vee x \leq 0$ obtem-se um absurdo, logo a suposição feito em (2) é falsa, i.e., devemos ter

$$x+x \neq 0.$$

4.

Seja

$0 \leq x$ (1)

$x < y$ (2)

De (2) : $x \neq y$ (3)

$x \leq y$ (4)

De (1), (4) e O3 : $0 \leq y$ (5)

Suponha $y = 0$. (6)

De (2) : $x < 0$

$\therefore$ $x \neq 0$ (7)

$x \leq 0$ (8)

De (1), (8) e O2 : $x = 0$

o que contraria (7).

Logo suposição (6) é falsa, i.e., devemos ter

$y \neq 0$ (9)

De (5), (9) : $0 < y$.

5.

b) $X = \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots\} \cup \{10\}$

$-1 < -\frac{1}{2} < \dots < -\frac{1}{n} < 0 < 10$

$\boxed{\sup X = 10}$

$\boxed{\inf X = -1}$

6.

i) $X \subset \mathbb{R}$

$$rX := \{rx \mid x \in X\} \quad (r > 0)$$

Seja X limitado superiormente

Do axioma da completude temos que

$\exists\ \alpha = \sup X$. (1)

$\therefore$ $x \leq \alpha, \ \forall x \in X$ (2)

$\alpha' < \alpha \Rightarrow \exists\ x' \in X, \ \alpha' < x'$. (3)

De (2) :

$$rx \leq r\alpha \ , \ \forall\, rx \in rX \quad (4)$$

Seja $\alpha'' < r\alpha$. (5)

Então $r^{-1}\alpha'' < \alpha$

De (3) : $\exists\ x' \in X$, $r^{-1}\alpha'' < x'$

$\therefore$ $\alpha'' < rx'$ (6)

De (5) e (6):

$$\alpha'' < r\alpha \implies \exists\, rx' \in rX;\ \alpha'' < rx' \quad (7)$$

De (4), (7):

$$r\alpha = \operatorname{Sup} rX.$$

6R c) Seja $X = (-\infty, 1)$

Temos $-1.X = (-1, +\infty)$

e neste caso $-1.X$ não é limitado superiormente.