Pré-Cálculo - Lista 2

Axiomas de Ordem

Nos exercícios a seguir prove o enunciado ou estabeleça a equação pedida

1. (i) $0 \leq x \Leftrightarrow -x \leq 0$
   (ii) $0 < x \Leftrightarrow -x < 0$
   (O oposto de um número positivo é negativo e vice-versa.)
   Obs: Note que estes resultados podem ser escritos também na forma:
   $0 \leq -x \Leftrightarrow x \leq 0$
   $0 < -x \Leftrightarrow x < 0$.
   Porquê?

2. (i) $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < x + y$
   (A soma de dois números positivos é positivo)
   (ii) $(x \leq 0) \wedge (y \leq 0) \Rightarrow x + y \leq 0$
   (iii) $(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow x + y < 0$
   (A soma de dois números negativos é um número negativo)

3. (i) $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < x \cdot y$
   (O produto de dois números positivos é um número positivo)
   (ii) $(x \leq 0) \wedge (y \leq 0) \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$
   (ii) $(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow 0 < x \cdot y$
   (O produto de dois números negativos é um número positivo)

4. $(0 < x) \wedge (y < 0) \Rightarrow x \cdot y < 0$
   (O produto de um número positivo e um número negativo é negativo)

5. (i) $(0 < x) \Rightarrow 0 < \frac{1}{x}$
   ~~(O recíproco de um número positivo é positivo~~
   Lembre-se: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$)
   (ii) $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$
   (O recíproco de um número negativo é negativo)

6. O quadrado de qualquer número real não nulo é positivo

7. $0 < 1$ (i.e. 1 é positivo)

8. A equação $x^2 + 1 = 0$ não tem raiz real

9. (5.3) iv
   $x < y,\ 0 < z \Rightarrow xz < yz$ e $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$
   (Multiplicação ou divisão de ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo preserva a desigualdade)

10. (5.8) v
    $x < y,\ z < 0 \Rightarrow yz < xz$ e $\frac{y}{z} < \frac{x}{z}$
    (Multiplicação ou divisão de ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo muda a desigualdade)

11. $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

12. $x < y,\ w < z \Rightarrow x + w < y + z$

13. $0 < x < y,\ 0 < z < w \Rightarrow xz < yw$ e $x/w < y/z$

14. Se x e y são dois números positivos então $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$

15. $x^2 + y^2 \geq 0$
    $x^2 + y^2 > 0$ a menos que se tenha $x = y = 0$

16. Seja x um número fixo satisfazendo $x < \epsilon$ para todo número positivo ϵ. Então $x \leq 0$.

17. Não existe nenhum número real que seja maior que todos os outros. Logo o conjunto dos números reais é infinito.

18. $x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$
    [Obs. O número 2 é definido como $2 := 1 + 1$]

19. Se $x^2 = y$ diz-se que x é a raiz quadrada de y. Pelo exercício (6), se tal número x existe então y deve ser não negativo; caso se tenha $y = 0$ então $x = 0$ é a única raiz quadrada de y. Mostre que se um número positivo y tem raízes quadradas, ele tem exatamente duas raízes, uma positiva e outra negativa.

20. No axioma de corpo que garante a existência do elemento neutro multiplicativo assumimos que $1 \neq 0$. Considere uma forma modificada desse axioma como se segue
    (M4*) $\exists 1 \in R, 1 = 0$ tal que $x.1 = x,\ \forall x \in R$.
    Verifique se (M4*) é consistente ou não. Isto é, se (M4*) não for consistente mostre onde ocorre a inconsistência. Se (M4*) for consistente caracterize a forma do conjunto R.

21. Seja uma relação $\mathcal{R}_{\subseteq}$ definida entre conjuntos pela regra: $A\mathcal{R}_{\subseteq}B \leftrightarrow A \subseteq B$. Verifique quais axiomas de ordem são obedecidos pela relação $\subseteq$.

22. Seja o conjunto das retas no plano. Seja uma relação definida da seguinte forma: *Duas retas no plano são equivalentes sss forem paralelas.* Verifique quais axiomas de ordem são verifica-dos por essa relação.

1.

i) $0 \leq x \iff -x \leq 0$

($\Longrightarrow$) Seja $0 \leq x$.

De (I, III): $0 + (-x) \leq x + (-x)$

De A1, A2: $-x \leq 0$

($\Longleftarrow$) Seja $-x \leq 0$

De (I, III): $-x + x \leq 0 + x$

De A1, A2: $0 \leq x$

---

ii) ($\Longrightarrow$)

Seja $0 < x$.

Então por definição:

$$x \neq 0 \wedge 0 \leq x.$$

Do resultado anterior (i) temos:

$$-x \leq 0 \qquad (1)$$

Mas, já vimos que

$$-x = (-1) \cdot x \qquad \text{[Ex. 25 - Lista 1]}$$

e sendo $-1 \neq 0$, $x \neq 0$ temos

$$-1 \cdot x \neq 0 \quad (\text{Ex. 15 - Lista 1})$$

$$\therefore \quad -x \neq 0 \quad \underline{\underline{(2)}}$$

De (1) e (2) : $-x \neq 0 \land -x \leq 0$

$$\therefore \quad \underline{-x < 0}$$

(i.e. $-x$ é negativo).

($\Leftarrow$) Seja $-x < 0$.

Então, $-x \neq 0 \land -x \leq 0$

Do resultado anterior (1.i) :

$$-x \leq 0 \Longrightarrow 0 \leq x \quad \underline{\underline{(1)}}$$

Mas

$$x = (-1) \cdot (-x)$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{(2)}} \quad x \neq 0 \quad (\text{pois } -1 \neq 0,\ -x \neq 0 \text{ e } (-1) \cdot (-x) \neq 0)$$

De (1), (2) : $x \neq 0$, $0 \leq x$

$$\therefore \quad \underline{0 < x}$$

$\therefore$ (x é positivo)

2.

(i) Seja $(0 < x) \wedge (0 < y)$.

$\therefore$

$x \neq 0$ (1)

$0 \leq x$ (2)

$y \neq 0$ (3)

$0 \leq y$ (4)

De (2), (4) e (I, III) : $0 \leq x + y$ (5)

Suponha $x + y = 0$ (6)

$\therefore x = -y$

De (4) e resultado 1 (i)

$0 \leq y \Rightarrow -y \leq 0$

$\therefore x \leq 0$

o que contraria (2).

Logo a suposição feita em (6) é falsa, i.e. devemos ter $x + y \neq 0$ (7)

De (5) e (7) :

$0 < x+y$.

2.

ii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ tq. $x \leq 0$ (1)

$y \leq 0$ (2)

De (1) e de (I, III):

$$x + y \leq 0 + y \quad (3)$$

De (3) e A1:

$$x + y \leq y \quad (4)$$

De (4), (2), O4:

$$x + y \leq 0$$

---

iii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ negativos, i.e.,

$x < 0$

$y < 0$.

Mas $x < 0 \iff x \neq 0 \wedge x \leq 0$ (1)

$y < 0 \iff y \neq 0 \wedge y \leq 0$ (2)

De (1), (2) e do resultado anterior temos

$$x + y \leq 0 \quad (3)$$

Suponha que $x+y=0$

Então de A.2:

$$y=-x.$$

Mas, se x é negativo temos $-x$ é positivo (Ex. 1);

$\therefore$ y é positivo

o que contraria a hipótese de que y é negativo.

Logo a suposição de que $x+y=0$ é falsa,

$$\therefore \quad x+y \neq 0 \quad (4)$$

De (3) e (4):

$$x+y<0.$$

$\therefore$ A soma de dois números negativos é um número negativo

3.

(ii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, x, y positivos.

Com efeito:

$$x \neq 0 \wedge 0 \leq x$$

$$y \neq 0 \wedge 0 \leq y$$

De (II, III):

(*) $$0 \leq x \cdot y$$

Mas $x \neq 0$, $y \neq 0$

$\therefore$ $x \cdot y \neq 0$ (Ex. 15 - Lista 1)

(**)

De (*) e (**):

$$0 < x \cdot y$$

$\therefore$ $x \cdot y$ é positivo.

3.

ii) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq 0$
$y \leq 0$.

Mas do Ex. 1:

$$x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -x$$

$$y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -y$$

De (II, III):

$$0 \leq (-x)(-y)$$

Mas $(-x)(-y) = x \cdot y$ (Ex. 26 - Lista 1)

$$\therefore \quad 0 \leq (-x)(-y) = xy$$

$$\therefore \quad 0 \leq x \cdot y.$$

iii) Sejam x, y negativos.

Então $x \neq 0$, $x \leq 0$

$y \neq 0$, $y \leq 0$

De (3.i) temos:

$$x \leq 0 \wedge y \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x \cdot y \quad (1)$$

Mas do Ex. 15 - lista 1:

$$x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Rightarrow x \cdot y \neq 0 \quad (2)$$

De (1) e (2):

$$0 < x \cdot y$$

$\therefore$ $x \cdot y$ é positivo

4.

Seja $(0<x) \wedge (y<0)$

$\therefore \quad 0<x \longleftrightarrow x \neq 0 \quad (1)$

$0 \leq x \quad (2)$

$y<0 \Rightarrow 0<-y$ (Res. Anterior)

$\therefore \quad -y \neq 0 \quad (3)$

$0 \leq -y \quad (4)$

De (2), (4), (II, III)

$0 \leq x(-y) \quad (5)$

Mas $x(-y) = -x \cdot y \quad (6)$ (Resultado anterior)

De (5) e (6):

$0 \leq -(x \cdot y)$

$\therefore \quad 0 + x \cdot y \leq -(x \cdot y) + x \cdot y$ (Result. Ant.)

$x \cdot y \leq 0$ [A.1, A.2]

$\underline{\underline{(7)}}$

De (1), (3) : $x \cdot (-y) \neq 0$ (Resultado anterior)

$\therefore \quad -(x \cdot y) = x(-y) \neq 0$

$\therefore \quad (x \cdot y) \neq 0 \quad$ (se $-x \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$)

(8)

De (7), (8) :

$$\underline{x \cdot y < 0}.$$

5.

(i) Seja

$$0 < x$$

$\therefore$ $x \neq 0$. (1)

$0 \leq x$ (2)

De (1) e M2 :

$$\exists\ x^{-1} \in \mathbb{R} \text{ tq. } x \cdot x^{-1} = 1 . \quad (3)$$

Temos $x^{-1} \neq 0$ (Ex. 16 (i) Lista 1) (4)

Suponha $x^{-1} \leq 0$. (✯)

Então $0 \leq -x^{-1}$ (Resultado anterior) (5)

De (2) , (5) , (II , III) :

$$0 \leq x(-x^{-1}) \quad (6)$$

Mas $x \cdot (-x^{-1}) = -(x \cdot x^{-1}) = -1$ (7)

De (6) e (7) : $0 \leq -1$

$\therefore$ $1 \leq 0$ (Resultado anterior)

$\therefore$ $1 < 0$ (pois $1 \neq 0$)

o que é absurdo.

Logo (*) é falso, i.e. deveremos ter

$$0 \leq x^{-1} \quad (8)$$

De (4) e (8):

$$0 < x^{-1}$$

Mas $x^{-1} = 1 \cdot x^{-1} = \frac{1}{x}$ (definição)

$$\therefore \quad \boxed{0 < \frac{1}{x}}$$

5 iv) Seja

$$x < 0.$$

Então $0 < -x$ (Resultado)

$\therefore$ $0 < \frac{1}{-x}$ (Resultado)

Mas $\frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$ (Resultado)

$\therefore$ $0 < -\frac{1}{x}$

$\therefore$ $0 + \frac{1}{x} < -\frac{1}{x} + \frac{1}{x}$ [Resultado]

$\frac{1}{x} < 0$ [A. 2]

6. Seja $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$. (1)

De O4 tem-se:

$$0 \leq x \vee x \leq 0 \quad (2)$$

De (1) e (2) temos os seguintes casos possíveis:

(*) $x \neq 0 \wedge 0 \leq x$

(**) $x \neq 0 \wedge x \leq 0$

(***) $x \neq 0 \wedge (0 \leq x \wedge x \leq 0)$

• De O2: se $0 \leq x \wedge x \leq 0$ então $x = 0$

Mas devemos ter $x \neq 0$, logo o caso (***) não ocorre.

• Seja o caso (*):

$$x \neq 0 \wedge 0 \leq x$$

$\therefore$ $0 < x$ (Definição de $<$)

$\therefore$ $0 < x^2$ (O produto de dois números positivos é positivo)

x^2 é positivo (3)

• Seja o caso (**):

$x \neq 0 \wedge x \leq 0$

Por definição de $<$ tem-se

$x < 0$

$\therefore \quad 0 < x^2$ (o produto de dois números negativos é negativo)

$\therefore \quad x^2$ é positivo (4)

De (3), (4)

x^2 é positivo

7. Seja $1 \in \mathbb{R}$ o elemento neutro multiplicativo.

De M1:

$$1 \neq 0$$

$\therefore \quad 0 < 1 \cdot 1 \qquad$ (Ex. 5)

Mas $\quad 1 = 1 \cdot 1$

$\therefore \quad 0 < 1 \cdot 1 = 1$

$\therefore \quad 0 < 1$

$\therefore \quad$ 1 é positivo

8. Seja $x \in \mathbb{R}$.

Podemos ter $x=0$ ou $x \neq 0$.

→ Suponha $x = 0$.

Então

$$x^2 \doteq x \cdot x = 0 \cdot 0 = 0 \quad \text{(Ex.13 - Lista 1)}$$

$$\therefore \quad x^2+1 = 0+1$$

(1) $\quad x^2+1 = 1 \qquad [A.1]$

Mas de M1:

(2) $\quad 0 \neq 1$

De (1) e (2): $\quad x^2+1 \neq 0$, $x=0$
(3)

→ Suponha $x \neq 0$.

Então

(4) $\quad 0 < x^2 \qquad$ (Ex.5 - Lista 2)

Também

(5) $\quad 0 < 1 \qquad$ (Ex.6 - Lista 2)

→

$\therefore$ $0 < x^2+1$ (A soma de dois números positivos é positivo)

$\therefore$

$x^2+1 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0$ (6)

De (3) e (6):

$x^2+1 \neq 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$

11. Seja $0 < x < y$ (1)

$\exists\, x^{-1},\ 0 < x^{-1}$ [Si]

De Ex. 9:

$$0 < x \cdot x^{-1} < y \cdot x^{-1}$$

$$0 < 1 < y \cdot x^{-1} \quad [M2]$$

$\exists\, y^{-1},\ 0 < y^{-1}$ [Si]

De Ex. 9:

$$0 < y^{-1} \cdot 1 < y^{-1}(y \cdot x^{-1})$$

$$y^{-1} < (y^{-1} \cdot y) \cdot x^{-1} \quad [M3]$$

$$y^{-1} < 1 \cdot x^{-1} \quad [M2]$$

$$y^{-1} < x^{-1} \quad [M1]$$

$$\frac{1}{y} < \frac{1}{x} \quad [\text{Resultado}]$$

13.

Seja $0 < x < y$ (1)

$0 < z < w$. (2)

$\therefore$ $0 < z$ e $0 < y$ (3)

De (1), (3), Ex. 9:

$0 < xz < y \cdot z$ (4)

De (2), (3), Ex. 9:

$0 < yz < yw$ (5)

(3), (5), Resultado:

$0 < xz < yw$.

21. $A R_{\subseteq} B \iff A \subseteq B$.

O1. $\forall A$ conjunto, $A \subseteq A$

∴ $A R_{\subseteq} A$.

i.e. O1 é verificada

O2. Seja $A R_{\leq} B$ e $B R_{\leq} A$

∴ $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$

∴ $A = B$

∴ O2 é verificado

O3. Seja $A R_{\leq} B$ e $B R_{\leq} C$.

∴ $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$

Então $A \subset C$

∴ O3 é verificado

O.4. Sejam A, B conjuntos

Se A e B forem disjuntos não

tem-se $A \not\subseteq B$ nem $B \not\subseteq A$

Logo $A \cancel{R_{\leq}} B$ e $B \cancel{R_{\leq}} A$

$\therefore$ O4 não é verificado

22.

Sejam r e s retas no plano.

$r \, R_{\parallel} \, s \longleftrightarrow r$ e s são retas paralelas

O1. $r \parallel r$, $\forall r$

$\therefore \; r \, R_{\parallel} \, r$

$\therefore$ O1 é verificado

O2. Sejam $r_1 \, R_{\parallel} \, r_2$ e $r_2 \, R_{\parallel} \, r_1$

$\therefore \; r_1 \parallel r_2$ e $r_2 \parallel r_1$

No entanto não é necessário que se tenha $r_1 = r_2$

$(r_1 \neq r_2)$

O3. Sejam $r_1 \, R_{\parallel} \, r_2$ e $r_2 \, R_{\parallel} \, r_3$

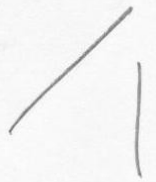
$\therefore \; r_1 \parallel r_2$ e $r_2 \parallel r_3$

$\therefore \; r_1 \parallel r_3$

$\therefore \; r_1 \, R_{\parallel} \, r_3$

$\therefore$ O3 é verificado

O4. Sejam r e s duas retas no plano.



em qual não se tem $r \parallel s$ nem $s \parallel r$

$\therefore$ O4 não é satisfeito.