Lista 11

Funções Trigonométricas

I - Calculando o valor de uma função trigonométrica para um ângulo qualquer reduzindo-a a uma função trigonométrica de um ângulo agudo.

1. Expresse cada uma das expressões abaixo como função de seu ângulo agudo associado e de o seu valor.

   (a) $\sin(-\frac{7\pi}{6})$

   (b) $\cos\frac{15\pi}{4}$

   (c) $\tan(-\frac{8\pi}{3})$

   (d) $\tan\frac{33\pi}{4}$

   (e) $\sin 240°$

   (f) $\cos(-135°)$

   (g) $\tan 330°$

   (h) $\sin 495°$

2. Expresse cada uma das expressões abaixo como função de seu ângulo agudo co-relacionado e de o seu valor.

   (a) $\cos\frac{11\pi}{6}$

   (b) $\sin(-\frac{7\pi}{6})$

   (c) $\sin 120°$

   (d) $\tan(-\frac{5\pi}{3})$

   (e) $\tan 510°$

   (f) $\cos(-315°)$

3. Simplifique (assuma x é ângulo agudo)

   (a) $\cos x + \cos(\pi - x) - \cos(\pi + x) - \cos(-x)$

   (b) $\tan x + \tan(\pi - x) + \cot(\frac{\pi}{2} - x) - \tan(2\pi - x)$

   (c) $\sin(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \tan(\frac{\pi}{2} + x) + \tan(\frac{3\pi}{2} - x)$

   (d) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\pi - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \sin(2\pi - x)$

4. Determine a cosecante, secante e cotangente de cada um dos ângulos abaixo, expressando-a em termos da cosecante, secante e cotangente de x.

   (a) $\pi - x$

   (b) $\frac{\pi}{2} + x$

   (c) $\pi + x$

   (d) $\frac{3\pi}{2} + x$

5. Simplifique

   (a) $\sin(x - \pi)$

   (b) $\cos(x - \frac{\pi}{2})$

   (c) $\tan(-x - \pi)$

6. Determine

   (a) $\sec(\pi + \frac{\pi}{3})$

   (b) $\csc(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$

   (c) $\cot(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$

   (d) $\sec(\frac{3\pi}{4})$

   (e) $\csc(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$

   (f) $\cot(-\pi + \frac{\pi}{4})$

7. Simplifique

   (a)
   $$\frac{\cos(\pi + x)\ \cos(\frac{\pi}{2} + x)}{\cos(\pi - x)} - \frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - x)}{\sec(\pi + x)}$$

   (b)
   $$\frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{\cos(\pi - x)} + \frac{\tan(x - \frac{3\pi}{2})}{-\tan(\pi + x)}$$

8. Se A, B, C são ângulos de um triângulo mostre que $\sin B = \sin(A + C)$.

II - Fórmulas de adição e subtração

9. Expresse como uma única função trigonométrica.

   (a) $\cos 2a\ \cos a - \sin 2a\ \sin a$

   (b) $\cos x\ \cos 4x + \sin x\ \sin 4x$

   (c) $\sin 5\ \cos 2 - \cos 5\ \sin 2$

   (d) $\sin 2m\ \cos m + \cos 2m\ \sin m$

   (e) $\frac{\tan 2a + \tan 3a}{1 - \tan 2a\ \tan 3a}$

   (f) $\frac{\tan 7 - \tan 9}{1 + \tan 7\ \tan 9}$

   (g) $\cos^2 x - \sin^2 x$

   (h) $\sin a\ \cos a + \cos a\ \sin a$

(i) $\frac{\tan x + \tan x}{1 - tan^2 x}$

(j) $\cos^2 2 + \sin^2 2$

10. Determine os valores das expressões abaixo usando as fórmulas de adição e subtração

    (a) $\sin \frac{11\pi}{12}$

    (b) $\cos \frac{13\pi}{12}$

    (c) $\tan(-\frac{7\pi}{12})$

    (d) $\tan(-\frac{5\pi}{12})$

    (e) $\sin 75°$

    (f) $\cos(-15°)$

11. Encontre o valor de cada expressão

    (a) $\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})$

    (b) $\cos(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})$

    (c) $\tan(-\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})$

12. Se x e y estão no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ e $\sin x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{12}{13}$, determine cada uma das expressões abaixo

    (a) $\sin(x - y)$

    (b) $\cos(x - y)$

    (c) $\tan(x + y)$

13. Se x está no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e y está no intervalo $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ e $\cos x = -\frac{5}{13}$ e $\tan y = \frac{4}{3}$ determine cada uma das expressões abaixo

    (a) $\sin(x + y)$

    (b) $\cos(x - y)$

    (c) $\tan(x - y)$

14. Encontre o valor exato de cada expressão abaixo.

    (a) $\sin 50° \cos 20° - \cos 50° \sin 20°$

    (b) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{21} - \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{21}$

    (c) $\frac{\tan 7° + \tan 8°}{1 - \tan 7° \tan 8°}$

    (d) $\sin \frac{5\pi}{36} \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{5\pi}{36} \sin \frac{5\pi}{18}$

15. Usando as fórmulas de soma e subtração para seno, coseno e tangente mostre que

    (a) $\sin(\pi + x) = -\sin x$

    (b) $\tan(2\pi - x) = -\tan x$

    (c) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x$

    (d) $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$

    (e) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

    (f) $\sin(x - \pi) = -\sin x$

    (g) $-\tan(-x - \pi) = \tan x$

16. Mostre que

    (a) $\sin x + \sin y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$

    (b) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

    (c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

    (d) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

17. Expresse cada uma das expressões abaixo como um produto, depois simplifique [Sugestão: Use o exercício anterior].

    (a) $\sin 60° + \sin 20°$

    (b) $\cos 70° - \cos 110°$

    (c) $\cos 40° + \cos 80°$

    (d) $\sin 6x - \sin 2x$

    (e) $\sin 130° - \sin 40°$

    (f) $\cos 4x - \cos 2x$

18. Simplifique

    (a)
    $$\frac{\sin(x - 30°) + \cos(60° - x)}{\sin x}$$

    (b)
    $$\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x) - \tan(\frac{\pi}{4} + x)}{\tan x}$$

    (c)
    $$\frac{\cos 4x + \cos 3x}{\sin 4x - \sin 3x}$$

19. Se $\sin x = -\frac{1}{3}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\cos y = \frac{2}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$, determine o valor de $\sec(x - y)$.

20. Expresse $\csc(x + y)$ em termos de secantes e cosecantes de x e y.

21. Desenvolva uma fórmula para $\sin(x + y + z)$. [Sugestão: Considere $\sin((x + y) + z)$]

22. Se x, y, z são ângulos no segundo quadrante e $\cos x = -\frac{1}{3}$, $\sin y = \frac{1}{4}$, $\sin z = \frac{1}{5}$ determine o valor de $\cos(x + y - z)$.

23. Se $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{1}{2}$ e $\frac{\cos x}{\cos y} = 3$ mostre que

    (a) $\sin(x + y) = \frac{7}{3} \sin x \cos x$

    (b) $\cos(x + y) = \frac{7\cos^2 x - 6}{3}$

24. Se $2\sin(x - y) = \sin(x + y)$ mostre que $\tan x = 3\tan y$.

25. Se $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = 3\tan(\frac{\pi}{4} - x)$ determine o valor de $\tan x$.

26. Simplifique

    (a) $\cos(\frac{3\pi}{4} + x) + \sin(\frac{3\pi}{4} - x)$

    (b) $\cos(\frac{\pi}{12} - x) \sec \frac{\pi}{12} - \sin(\frac{\pi}{12} - x) \csc \frac{\pi}{12}$

    (c) $\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} + \frac{\sin(z-x)}{\cos z \cos x} + \frac{\sin(y-z)}{\cos y \cos z}$

III - Formulas envolvendo duplicação do ângulo

27. Use as expressões envolvendo duplicação do ângulo para reescrever cada uma das expressões abaixo

    (a) $\cos 2(2x)$

    (b) $\sin 3x$

    (c) $\tan 6x$

    (d) $\sin \frac{1}{2}x$

    (e) $\cos \frac{2}{3}x$

    (f) $\tan(-7x)$

28. Reduza as expressoes a seguir a uma função que seja seno ou coseno

    (a) $2\sin 3\theta \cos 3\theta$

    (b) $6\sin\theta \cos\theta$

    (c) $\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \cos\frac{\theta}{2}$

    (d) $\cos^2 \frac{3\theta}{2} - \sin^2 \frac{3\theta}{2}$

    (e) $1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{4}$

    (f) $2\cos^2(\frac{7}{2}\theta) - 1$

    (g) $8\sin^2 2\theta - 4$

    (h) $1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

29. Determine $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$ sabendo que $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.

30. Determine $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$ sabendo que $\sin\theta = \frac{12}{13}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

31. Determine $\sin 4\theta$ sabendo que $\sin\theta = \frac{2}{3}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

32. Determine $\csc 2\theta$ e $\sec 2\theta$ sabendo que $\cos\theta = \frac{2}{5}$, $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$

33. Determine $\tan 2a$ sabendo que $\tan a = \frac{1}{2}$, $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.

34. Determine $\tan 4a$ sabendo que $\tan a = 2$, $-2\pi \leq a \leq -\frac{3\pi}{2}$.

35. Obtenha fórmulas para

    (a) $\sin 3\theta$ em termos de $\sin\theta$

    (b) $\cos 3\theta$ em termos de $\cos\theta$

    (c) $\tan 3\theta$ em termos de $\tan\theta$

    (d) $\cos 4\theta$ em termos de $\cos\theta$

36. Encontre o valor exato.

    (a) $\sin 67\frac{1}{2}^\circ$

    (b) $\cos 112\frac{1}{2}^\circ$

    (c) $\tan 22.5^\circ$

    (d) $\sin(-\frac{\pi}{8})$

    (e) $\cos\frac{\pi}{16}$

    (f) $\tan 33.75^\circ$

37. (a) Expresse $\sin\frac{\theta}{2}$ em termos de $\cos\theta$.

    (b) Expresse $\cos\frac{\theta}{2}$ em termos de $\cos\theta$.

    (c) Expresse $\tan\frac{\theta}{2}$ em termos de $\cos\theta$.

38. Se $\cos x = -\frac{12}{13}$ e $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, determine

    (a) $\sin\frac{x}{2}$

    (b) $\cos\frac{x}{2}$

    (c) $\tan\frac{x}{2}$

39. Expresse $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$ em termos de $\tan\theta$.

40. Expresse $\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$ em termos de $\tan x$.

41. Expresse $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ como uma função trigonométrica de $2x$.

42. Se $\cos\theta + \sin\theta = \frac{2}{3}$, determine $\sin 2\theta$.

43. Se $\cos\theta + \sin\theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $\cos\theta - \sin\theta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ determine o valor de $\sin 2\theta$.

44. Se $2a + b = \frac{\pi}{2}$, mostre que $\cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\sin b}{2}}$.

45. Se $\tan a = \frac{1}{5}$ e $\tan b = \frac{1}{239}$, determine o valor de $\tan(4a - b)$.

46. Se $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$, determine o valor de $\cos^2\theta,\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

47. Simplifique $\sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2})$.

IV - Identidades trigonométricas

48. $\sin x\ \tan x = \sec x - \cos x$

49. $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x$

50. $\csc^2 x + \sec^2 x = \csc^2 x \sec^2 x$

51. $\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 y \cos^2 x = 1$

52. $\sec^2 x - \sec^2 y = \tan^2 x - \tan^2 y$

53. $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x\ \tan y$

54. $(\sec x - \cos x)(\csc x - \sin x) = \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}$

55. $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\sin^2 x + 3\sin^4 x$

56. $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3\tan^2 x\ \sec^2 x$

As identidades a seguir envolvem a fórmula de adição e subtração

57. $1 + \cot x\ \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x\ \cos y}$

58. $\cos(x+y)\ \cos y + \sin(x+y)\ \sin y = \cos x$

59. $\sin x - \tan y \cos x = \frac{\sin(x-y)}{\cos y}$

60. $\cos(\frac{3\pi}{4} + x) + \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 0$

61.
$$\frac{\tan(\frac{\pi}{4} + x) - \tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan(\frac{\pi}{4} - x)} = 2\sin x\ \cos x$$

62. $\sin(x+y)\ \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$

63. $\tan(x+y)\ \tan(x-y) = \frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\cos^2 x - \sin^2 y}$

64. $\frac{\tan(x-y) + \tan y}{1 - \tan(x-y)\ \tan y} = \tan x$

65. $\sin 5x = \sin x\,(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2\cos x\ \cos 2x\ \sin 2x$

As identidades a seguir envolvem ângulos relacionados e co-relacionados.

66. $\sin(\frac{\pi}{2} - x)\ \cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

67. $\cos(-x) + \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) + \cos x$

68.
$$\frac{\sin(\pi - x)}{\tan(\pi + x)}\ \frac{\cot(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan(\frac{\pi}{2} + x)}\ \frac{\cos(2\pi - x)}{\sin(-x)} = \sin x$$

69.
$$\frac{\sin(-x)}{\sin(\pi + x)} - \frac{\tan(\frac{\pi}{2} + x)}{\cot x} + \frac{\cos x}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} = 3$$

70.
$$\frac{\csc(\pi - x)}{\sec(\pi + x)}\ \frac{\cos(-x)}{\cos(\frac{\pi}{2} + x)} = \cot^2 x$$

71.
$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x)\ \sec(-x)\ \tan(\pi - x)}{\sec(2\pi + x)\ \sin(\pi + x)\ \cot(\frac{\pi}{2} - x)} = -1$$

72.
$$\frac{\sin(\pi - x)\cos(\pi + x)\tan(2\pi - x)}{\sec(\frac{\pi}{2} + x)\csc(\frac{3\pi}{2} - x)\cot(\frac{3\pi}{2} + x)} = \sin^4 x - \sin^2 x$$

As identidades a seguir envolvem a fórmula de ângulo duplo

73. $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} = \tan x$

74. $\frac{1+\cos x}{\sin x} = \cot\frac{x}{2}$

75. $2\csc 2x = \sec x\ \csc x$

76. $2\cot 2x = \cot x - \tan x$

77. $\frac{\cos 2x}{1+\sin 2x} = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$

78. $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \sec 2x - \tan 2x$

79. $\frac{1-\cos 2x+\sin 2x}{1+\cos 2x+\sin 2x} = \tan x$

80. $\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x\,(1 - \frac{1}{4}\sin^2 2x)$

81. $4(\cos^6 x + \sin^6 x) = 1 + 3\cos^2 2x$

82. $\sec x - \tan x = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

83. $\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\,\frac{\cos x}{1+\cos x} = \tan\frac{x}{2}$

As identidades a seguir envolvem o uso de fórmulas e relações diversas

84. $\sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x + \sin^4 x$

85. $\tan x - \cot x = (\tan x - 1)(\cot x + 1)$

86. $\cos x = \sin x\,\tan^2 x\,\cot^3 x$

87. $(\sin x + \cos x)(\tan x + \cot x) = \sec x + \csc x$

88. $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x\,(\csc^2 x - 2\cos^2 x)$

89. $\sin^3 x + \cos^3 x = (1 - \sin x\,\cos x)(\sin x + \cos x)$

90. $\cos(\frac{\pi}{12} - x)\,\sec\frac{\pi}{12} - \sin(\frac{\pi}{12} - x)\,\csc\frac{\pi}{12} = 4\sin x$

91. $\tan(x-y) + \tan(y-z) =$
$= \frac{\sec^2 y\,(\tan x - \tan z)}{(1+\tan x\,\tan y)(1+\tan y\,\tan z)}$

92. $\sin 8x = 8\sin x\,\cos x\,\cos 2x\,\cos 4x$

93. $\sin x = 1 - 2\sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

94. $\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2\sin x\,\cos y$

95.
$$\frac{\sin(x-y)}{\sin x\,\sin y} + \frac{\sin(y-z)}{\sin y\,\sin z} + \frac{\sin(z-x)}{\sin z\,\sin x} = 0$$

96. $\tan x + \tan(\pi - x) + \cot(\frac{\pi}{2} + x) = \tan(2\pi - x)$

97. $\sin(\frac{\pi}{2} + x)\,\cos(\pi - x)\,\cot(\frac{3\pi}{2} + x) =$
$\sin(\frac{\pi}{2} - x)\,\sin(\frac{3\pi}{2} - x)\,\cot(\frac{\pi}{2} + x)$

98. $\tan(\frac{\pi}{2} - x) - \cot(\frac{3\pi}{2} - x) + \tan(2\pi - x) -$
$- \cot(\pi - x) = \frac{4 - 2\sec^2 x}{\tan x}$

99. $\tan(x+y+z) = \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x\,\tan y\,\tan z}{1 - \tan x\,\tan y - \tan x\,\tan z - \tan y\,\tan z}$

100. $\csc^2(\frac{\pi}{2} - x) = 1 + \sin^2 x\,\csc^2(\frac{\pi}{2} - x)$

101. $\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan(\frac{\pi}{4} - x) = 2\sec 2x$

102. $\frac{1-\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos 2x}{1+\sin 2x}$

103. $\frac{\sin 4x}{1-\cos 4x}\,\frac{1-\cos 2x}{\cos 2x} = \tan x$

IV - Equações trigonométricas

104. Resolva as equações para x no intervalo $[0, 2\pi]$

(a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos x = \frac{1}{2}$

(c) $\tan x = -1$

(d) $\sec x = -2$

(e) $\sin x = -\frac{1}{2}$

(f) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

105. Resolva as equações para x no intervalo $[-\pi, 0]$

(a) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\tan^2 x = \tan x$

(c) $\sin^2 x - \sin x = 2$

(d) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

(e) $(2\csc x - 1)^2 = 9$

106. Resolva as equações para x nos intervalos especificados

(a) $\sin x - \sin x\,\tan x = 0, \quad x \in [0, \pi]$

(b) $\sin x\,\tan 3x = 0, \quad x \in [-\pi, 0]$

(c) $6\sin^2 x - 5\cos x - 2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$

(d) $\sqrt{2}\sin x + \tan x = 0, \quad x \in [-\pi, \pi]$

(e) $\cos^2 x - 3\sin^2 x = 1, \quad [-2\pi, 2\pi]$

(f) $2\tan x = \sec x, \quad [-2\pi, 0]$

107. Resolva para x

(a) $\cos 2x = \cos^2 x, \quad -\pi \le x \le \pi$

(b) $\sin 2x = \cos x, \quad -\pi \le 2x \le \pi$

(c) $\cos^2 x - 2\sin x\,\cos x - \sin^2 x = 0, \quad 0 \le 2x \le \pi$

(d) $\tan 2x = 8\cos^2 x - \cot x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

(e) $\tan x + \sec 2x = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(f) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 1, \quad -\pi \le x \le \pi$

108. Resolva a equação
$2\tan x\,\cos^2 x + \sin x\,\tan x - 2\tan x = 0$ com $|x| < 2\pi$

109. Determine os valores de $\sin x$ e $\cos x$ sabendo que $\tan 2x = -\frac{24}{7}$

110. Se $x\sin A + y\cos A = p$ e $x\cos A - y\sin A = q$, encontre $x^2 + y^2$.

111. Se $\sin A + \cos A = p$ e $\tan A + \cot A = q$ mostre que $q(p^2 - 1) = 2$.