

Lista 12

Funções trigonométricas inversas

1. Encontre o valor numérico das expressões a seguir

$$\begin{array}{lllll} a) \arcsin \frac{1}{2} & b) \arccos 1 & c) \operatorname{arccsc}(-1) & d) \arctan 0 & e) \operatorname{arccot}(-\sqrt{3}) \\ f) \arctan(-\sqrt{3}) & g) \operatorname{arccsc} \sqrt{2} & h) \operatorname{arcsec} 2 & i) \operatorname{arccsc} 2\sqrt{3}/3 & j) \operatorname{arcsec}(-2) \\ k) \operatorname{arcsec}(-2\sqrt{3}/3) & l) \arcsin 0 & m) \arcsin -\frac{1}{2} & n) \arccos(-\sqrt{3}/2) & o) \arctan 1 \end{array}$$

2. Encontre o valor numérico das expressões a seguir

$$\begin{array}{lllll} a) \sin(\arccos \frac{1}{2}) & b) \tan(\arcsin \sqrt{3}/2) & c) \sec(\arccos \sqrt{3}/2) & d) \csc(\arctan(-1)) & e) \sin(\arcsin(-\frac{1}{2})) \\ f) \csc(\operatorname{arccot}(-\sqrt{3})) & g) \csc(\operatorname{arcsec} \sqrt{2}) & h) \arcsin(\cos \pi/6) & i) \operatorname{arccot}(\tan \pi/3) & j) \arctan(\tan 0) \end{array}$$

3. Mostre que

$$\begin{array}{lll} a) \sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2} & b) \sin(\operatorname{arccsc} x) = \frac{1}{x} & c) \cos(2 \arcsin x) = 1 - 2x^2 \\ d) \sin(2 \arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2} \end{array}$$

Obs.: É possível termos $\sec(\arctan x) = -\sqrt{1+x^2}$ e $\sin(2 \arcsin x) = -2x\sqrt{1-x^2}$? Explique.

4.

a) Mostre que

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

desde que o valor da expressão do lado esquerdo esteja entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (Tal condição é usada apenas para garantir que pode-se escrever o lado esquerdo como o arco seno da expressão dada do lado direito)

b) Mostre que

$$\arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad \text{com } -1 < x < 1$$

c) Mostre que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan \frac{x+y}{1-xy} \quad \text{para } xy \neq 1$$

considerando que o valor da expressão do lado esquerdo esteja entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

d) Sejam a, b, c números satisfazendo $bc = 1 + a^2$. Mostre que

$$\arctan \frac{1}{a+b} + \arctan \frac{1}{a+c} = \arctan \frac{1}{a}$$

desde que a expressão do lado esquerdo esteja entre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e que tenhamos $a+b \neq 0$, $a+c \neq 0$, $a \neq 0$.

e) Mostre que

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{x}{3} - 1\right) &= \frac{\pi}{2} - 2 \arcsin \sqrt{1 - \frac{x}{6}} \\ \arcsin\left(\frac{x}{3} - 1\right) &= 2\left(\arcsin \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

f) Mostre que existe uma constante c tal que se tem

$$\arcsin x + \arccos x = c, \quad \text{com } -1 \leq x \leq 1$$

g) Seja $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$. Mostre que $f(x)$ é constante em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Encontre as constantes.