Pré-Cálculo - Lista 2

Axiomas de Ordem

Nos exercícios a seguir prove o enunciado ou estabeleça a equação pedida

1. (i) $0 \le x \Leftrightarrow -x \le 0$
   (ii) $0 < x \Leftrightarrow -x < 0$
   (O oposto de um número positivo é negativo e vice-versa.)
   Obs: Note que estes resultados podem ser escritos também na forma:
   $0 \le -x \Leftrightarrow x \le 0$
   $0 < -x \Leftrightarrow x < 0$.
   Porquê?

2. (i) $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < x + y$
   (A soma de dois números positivos é positivo)
   (ii) $(x \le 0) \wedge (y \le 0) \Rightarrow x + y \le 0$
   (iii) $(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow x + y < 0$
   (A soma de dois números negativos é um número negativo)

3. (i) $(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow 0 < x \cdot y$
   (O produto de dois números positivos é um número positivo)
   (ii) $(x \le 0) \wedge (y \le 0) \Rightarrow 0 \le x \cdot y$
   (ii) $(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow 0 < x \cdot y$
   (O produto de dois números negativos é um número positivo)

4. $(0 < x) \wedge (y < 0) \Rightarrow x \cdot y < 0$
   (O produto de um número positivo e um número negativo é negativo)

5. (i) $(0 < x) \Rightarrow 0 < \frac{1}{x}$
   (O recíproco de um número positivo é positivo. Lembre-se: $\frac{a}{b} := a \cdot b^{-1}$)
   (ii) $x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < 0$
   (O recíproco de um número negativo é negativo)

6. O quadrado de qualquer número real não nulo é positivo

7. $0 < 1$ (i.e. 1 é positivo)

8. A equação $x^2 + 1 = 0$ não tem raiz real

9. $x < y,\ 0 < z \Rightarrow xz < yz$ e $\frac{x}{z} < \frac{y}{z}$
   (Multiplicação ou divisão de ambos os membros de uma desigualdade por um número positivo preserva a desigualdade)

10. $x < y,\ z < 0 \Rightarrow yz < xz$ e $\frac{y}{z} < \frac{x}{z}$
    (Multiplicação ou divisão de ambos os membros de uma desigualdade por um número negativo muda a desigualdade)

11. $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

12. $x < y,\ w < z \Rightarrow x + w < y + z$

13. $0 < x < y,\ 0 < z < w \Rightarrow xz < yw$ e $x/w < y/z$

14. Se x e y são dois números positivos então $x < y \Leftrightarrow x^2 < y^2$

15. $x^2 + y^2 \ge 0$
    $x^2 + y^2 > 0$ a menos que se tenha $x = y = 0$

16. Seja x um número fixo satisfazendo $x < \epsilon$ para todo número positivo ϵ. Então $x \le 0$.

17. Não existe nenhum número real que seja maior que todos os outros. Logo o conjunto dos números reais é infinito.

18. $x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$
    [Obs. O número 2 é definido como $2 := 1 + 1$]

19. Se $x^2 = y$ diz-se que x é a raiz quadrada de y. Pelo exercício (6), se tal número x existe então y deve ser não negativo; caso se tenha $y = 0$ então $x = 0$ é a única raiz quadrada de y. Mostre que se um número positivo y tem raízes quadradas, ele tem exatamente duas raízes, uma positiva e outra negativa.

20. No axioma de corpo que garante a existência do elemento neutro multiplicativo assumimos que $1 \ne 0$. Considere uma forma modificada desse axioma como se segue
    (M4*) $\exists 1 \in R, 1 = 0$ tal que $x.1 = x,\ \ \forall x \in R$.
    Verifique se (M4*) é consistente ou não. Isto é, se (M4*) não for consistente mostre onde ocorre a inconsistência. Se (M4*) for consistente caracterize a forma do conjunto R.

21. Seja uma relação $\mathcal{R}_{\subseteq}$ definida entre conjuntos pela regra: $A\mathcal{R}_{\subseteq}B \leftrightarrow A \subseteq B$. Verifique quais axiomas de ordem são obedecidos pela relação $\subseteq$.

22. Seja o conjunto das retas no plano. Seja uma relação definida da seguinte forma: *Duas retas no plano são equivalentes sss forem paralelas.* Verifique quais axiomas de ordem são verificados por essa relação.