Pré-Cálculo - Lista 4

Conjuntos Indutivos. Números Naturais

1. Verifique se os conjuntos a seguir são indutivos
   (a) $A_1 = \{0\} \cup \{2m \mid m \in N\}$
   (b) $A_2 = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
   (c) $A_3 = \{\frac{m}{2} \mid m \in N\}$

2. Mostre que $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$

3. Mostre que $1 \cdot 2 + 2 \cdot 5 + \cdots + n \cdot (3n - 1) = n^2(n + 1)$

4. Mostre que $1 + 2 + ... + n = \frac{1}{2}n(n + 1), \forall n \in N$.

5. Mostre que $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1)$.

6. Seja $a \in R$. Seja a definição indutiva

$$\begin{cases} a^1 := a \\ a^{n+1} := a^n \cdot a, \quad \forall n \in N \end{cases}$$

   Mostre que para todo $n, m \in N$, e para todo $a, b \in R$ tem-se a **Leis dos Expoentes**

$$\begin{cases} a^n a^m = a^{n+m} \\ (a^n)^m = a^{nm} \\ a^m b^m = (ab)^m \end{cases}$$

7. Seja $a \in R$ com $a \neq 0$. Defina $a^0 := 1$. Mostre que $\forall n, m \in N$ tem-se

$$\frac{a^n}{a^m} = \begin{cases} a^{n-m} & \text{se } n \geq m \\ \frac{1}{a^{m-n}} & \text{se } m > n \end{cases}$$