Pré-Cálculo - Lista 6

Desigualdades

1. Encontre os valores de x que satisfazem a ambas desigualdades
$3x + 5 > 2$ e $2x + 3 < 3$

2. Encontre os valores de x que satisfazem a pelo menos uma das desigualdades
$2x - 4 < 7x + 6$ ou $4x - 2 < -x + 3$

3. Se $x^2 \leq 25$ tem-se necessariamente que $x \leq 5$? Explique.

4. Se $x^3 > 125$ tem-se necessariamente que $x > 5$? Explique.

5. Tem-se $\frac{1}{x} < x$ para todo x não nulo? Explique.

6. Mostre que $x < x^2$ para $x < 0$ ou $x > 1$.

7. Mostre que $x^2 < x$ para $0 < x < 1$.

8. Para que valores <u>inteiros</u> n verifica-se a sentença: $x < x^n$ para todo $x > 1$?

9. Encontre números não-nulos a e b, $a < b$ para o qual a desigualdade $a^2 < b^2$ é falsa.

10. Encontre números não-nulos a e b, $a < b$ para o qual a desigualdade $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ é falsa.

11. Encontre números a, b, c, d tal que $a < b,\ c < d$ e $ac > bd$.

12. Mostre que se $a < b$ então $a < \frac{a+b}{2} < b$. Geometricamente, qual é a relação que há entre $\frac{a+b}{2}$ e os números a e b? (O número $\frac{a+b}{2}$ é chamado a *média aritmética* de a e b).

13. Mostre que se $0 < a < b$ então $a < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. (O número $\sqrt{ab}$ é dito a *média geométrica* entre a e b). [Sugestão: $(\sqrt{b/2} - \sqrt{a/2})^2 > 0$.]

14. Seja $0 < a < b$ e seja h definido como
$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\Big)$$
Mostre que $a < h < b$. (O número h é dito a média harmônica entre a e b).

15. Seja $0 < a < b$. Mostre que $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{b-a}$

16. (i) Se x é um número positivo, mostre que
$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$
(ii) Se x e y são números positivos mostre que
$$\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\Big)(x+y) \geq 4$$
(iii) Se x, y e z são números positivos mostre que
$$\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\Big)(x+y+z) \geq 9$$
(iv) Se x, y, z e w são números positivos mostre que
$$\Big(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{w}\Big)(x+y+z+w) \geq 16$$
(v) Generalize o resultado anterior para o caso de n números $x_1, x_2, \dots .x_n$.

17. Se x, y são números não nulos mostre que
$$\frac{x^2}{y^2} + \frac{16y^2}{x^2} + 24 \geq \frac{8x}{y} + \frac{32y}{x}$$

18. Sejam x, y números positivos com $x \geq y$. Mostre que
$$\frac{x}{y} + 3\frac{y}{x} \geq \frac{y^2}{x^2} + 3 \tag{1}$$
Mostre que a desigualdade fica invertida se tivermos $y \geq x$.

Inequações

Sugestão: Fazer os exercícios sobre inequações do livro
Fundamentos da Matemática Elementar Vol. 1 (7^a edição) (Gelson Iezzi) pags. 121 à 137; 165 à 182.