

Lista 8

Funções

Determine o domínio das funções nos exercícios 1-52

- $f(x) = x^3 - 4x + 1$
- $f(x) = x^6 - \sqrt{2}x^3 - \pi$
- $k(x) = 1 + x^3$ com $-2 \leq x \leq 8$
- $f(x) = 2x - 3x^5$ com $x < 4$
- $f(x) = \sqrt{x+2}$
- $f(x) = \sqrt{2-3x}$
- $f(x) = \sqrt{2x-7}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+5}$
- $g(x) = \sqrt{x^2}$
- $f(x) = \sqrt{x^2+4}$
- $g(x) = \sqrt{x^2-2}$
- $f(x) = x\sqrt{x^2-2}$
- $f(x) = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}$
- $f(x) = \frac{1}{4-x^2}$
- $y = \sqrt{2+x-x^2}$
- $y = \sqrt{x-x^3}$
- $f(t) = \sqrt{4-9t^2}$
- $f(t) = \sqrt{3-\frac{1}{t^2}}$
- $f(t) = \frac{t}{\sqrt{t+5}}$
- $f(t) = \sqrt[3]{1-t^2}$
- $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$
- $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$
- $y(u) = \sqrt[3]{3-2u}$
- $g(x) = (x-6)^{\frac{1}{4}}$
- $f(x) = (x+7)^{\frac{1}{6}}$
- $f(x) = (x+7)^{\frac{1}{5}}$
- $g(x) = \sqrt[10]{x-6}$
- $g(x) = \sqrt[11]{x-6}$
- $g(x) = \frac{2}{x-1}$
- $g(x) = \frac{3x-1}{x-3}$
- $g(w) = \frac{2w-8}{w^2-16}$
- $g(w) = \frac{w-1}{w^2-w-6}$
- $k(x) = \frac{2x-3}{x^2+4}$
- $f(x) = \frac{x}{x^2+2x+1}$
- $f(x) = \frac{3}{x^2-2x+1}$
- $g(x) = \frac{x-3}{x^2+5x+4}$
- $f(t) = \frac{t-1}{t^2+1}$
- $h(t) = \frac{3t^2-2t}{t^4+t^2+1}$
- $k(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x-1}$
- $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$
- $f(w) = \frac{2}{w+1} + 1$
- $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$
43.
$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } -4 \leq x \leq -1 \\ 3 & \text{se } 0 < x < 6 \end{cases}$$
44.
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x \leq 2 \\ x^2 - 1 & \text{se } x > \sqrt{5} \end{cases}$$
- $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$
- $f(x) = \sqrt{x^2-x-2} + \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$
- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-x-2}}$
- $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$
- $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+2x+3}$
- $f(x) = \sqrt{1-\sqrt{9-x^2}}$
- $f(x) = \sqrt{4-\sqrt{1+9x^2}}$

$$52. f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{4 - x^2}}$$

Encontre o domínio e a imagem das funções nos exercícios 53-66

$$53. f(x) = 3$$

$$54. g(w) = -4$$

$$55. f(x) = 2x$$

$$56. g(x) = -3x + 2$$

$$57. h(t) = \frac{1}{2}\sqrt{t+5}$$

$$58. k(w) = -\frac{1}{w}$$

$$59. f(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$60. f(x) = |x|$$

$$61. f(x) = -\frac{4}{x^3}$$

62.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -2 \leq x < 0 \\ 3x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

63.

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } -4 \leq x \leq -2 \\ -3x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

64.

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } -2 < x < 3 \\ x-2 & \text{se } 4 < x < 5 \\ x-5 & \text{se } 7 < x < 10 \end{cases}$$

65.

$$y = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 0 \\ x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

66.

$$y = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & \text{se } x \geq 1 \\ 2x - \sqrt{3} & \text{se } x < 1 \end{cases}$$

Nos exercícios 67-87 verifique que expressões determinam uma função $y = y(x)$. Nesses casos determine também o domínio. Nos casos em que não se tem uma função explique o porque.

$$67. y = x - 4$$

$$68. y = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$69. y = \sqrt{4 - x^2}$$

$$70. x^2 + y^2 = 4$$

$$71. y = x^2$$

$$72. y = x^3$$

$$73. x = y^3$$

$$74. 3x^2 + y^2 = 1$$

$$75. 3x^2 + y = 1$$

$$76. \frac{y+1}{y-1} = x$$

$$77. x = y - \frac{1}{y}$$

$$78. y = (x-1)^2 + 2$$

$$79. x = (y-2)^2 + 1$$

$$80. y = (x+2)^3 - 1$$

$$81. x = (y+1)^3 - 2$$

$$82. y = \pm\sqrt{x}$$

$$83. y = \sqrt[5]{x} \text{ para todo } x \text{ real}$$

84.

$$y = \begin{cases} 2x^2 & \text{se } x < 0 \\ 3x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

85.

$$y = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

86.

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

87.

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x^2 \text{ é racional} \\ x & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

$$88. \text{ Seja } f(x) = \frac{x+1}{x-1}.$$

Determine $f(2x)$, $2f(x)$, $f(x^2)$, $(f(x))^2$.

89. Seja $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
Determine $f(0)$, $f(-3/4)$, $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $\frac{1}{f(x)}$.
90. Seja $f(x) = \frac{x+1}{x^3-1}$.
Determine $f(-1)$, $f(a+1)$, $f(a)+1$.
91. Seja $f(x) = \frac{5x^2+1}{2-x}$.
Determine $f(3x)$, $f(x^3)$, $3f(x)$, $(f(x))^3$.
92. Determine $f(x)$ sabendo que $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$
93. Seja $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.
Determine $f(-x)$, $f(\frac{1}{x})$, $f(\frac{1}{1-x})$
94. Se $f(x) = ax + b$ mostre que $f(\frac{x_1+x_2}{2}) = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$
95. Determine uma função linear $f(x)$ tal que $f(-1) = 2$, $f(2) = -3$
96. Determine uma função da forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ satisfazendo $f(0) = 5$, $f(-1) = 10$, $f(1) = 6$.
97. Calcule $f(x) = \frac{49}{x^2} + x^2$ para os valores de x satisfazendo $\frac{7}{x} - x = 3$.
98. Calcule $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = x^4 + \frac{1}{x^4}$ para os valores de x satisfazendo $\frac{1}{x} + x = 5$.
- Nos exercícios 93-99 verifique que par de funções são semelhantes**
99. A função $2x + 3$ e a função f , onde $f(x) = 2x + 3$, $x \leq 1$
100. A função \sqrt{x} e a função f , onde $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$
101. $\sqrt{x^2}$ e $|x|$
102. $\sqrt[3]{x}$ e $\sqrt[6]{x^2}$
103. $\frac{x^{17}+1}{x^{17}+1}$ e 1
104. $\frac{4x^6+8x^3+4}{2x^3+2}$ e $2x^3 + 2$
105. A função $\frac{4x^6+8x^3+4}{2x^3+2}$ e a função f onde $f(x) = 2x^3 + 2$, $x \neq -1$
106. **Quais das seguintes funções abaixo são iguais?**
(a) $f_1(x) = 1 + 4x + 4x^2$
(b) $f_2(y) = 1 + 2y$
(c) $f_3(z) = 1 + 2z$, $z \geq 0$
(d) $f_4(t) = 1 + 2t$
(e) $f_5(x) = |1 + 2x|$
(f) $f_6(x) = \frac{(1+2x)^2}{1+2x}$
107. **Quais das seguintes funções abaixo são iguais?**
(a)
- $$f_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$
- (b) $f_2(x) = x + 1$
(c) $f_3(x) = x + 1$, $x \neq 1$
- Os exercícios a seguir envolvem geometria.**
108. Encontre a expressão para uma função que associa a cada x maior do que 2 o número obtido tomando o quadrado de x , depois subtraindo $4x$, e finalmente somando 3.
109. Encontre a expressão para uma função que associa a cada x não-negativo o número obtido dividindo x por 4, depois tomando a raiz cúbica deste quociente, e finalmente multiplicando este resultado pelo produto de 3 e x^2 .
110. Um retângulo com altura x é inscrito em um triângulo ABC com base b e altura h . Expresse o perímetro P e a área S do retângulo como funções de x .
111. Se um triângulo equilátero tem lado x expresse sua área como função de x .
112. O perímetro de um triângulo retângulo é 6 e a hipotenusa é x . Expresse a área como função de x .
113. Os lados iguais de um triângulo isósceles têm medida 2. Se x é a base, expresse a área como função de x .

114. Um retângulo, cuja base tem comprimento x , está inscrito num círculo de raio a . Exprima a área do retângulo como função de x .
115. Se a aresta de um cubo é x , exprima seu volume, a área de sua superfície e sua diagonal como funções de x .
116. Um fio de comprimento L é cortado em dois pedaços com os quais se forma uma circunferência e um quadrado. Se x é o lado do quadrado, exprima a área total englobada pelas duas figuras como função de x .
117. A área de um círculo é função do comprimento de sua circunferência? Se for, qual é essa função?
118. A área de um quadrado é função de seu perímetro? Se for, qual é essa função?
119. A área de um triângulo é função de seu perímetro? Se for, qual é essa função?
120. O volume de uma esfera é função da área da sua superfície? Se for, qual é essa função?
121. Um cilindro tem área de superfície dada A . Exprima seu volume como função do raio r de sua base e da área de superfície A .
122. Um cilindro está inscrito numa esfera de raio a . Se h é a altura e r o raio da base do cilindro, exprima seu volume e a área da superfície total como funções de r e também como funções de h .
123. Um cilindro está circunscrito a uma esfera, sendo os respectivos volumes denotados por V_c e V_e . Ache V_c como função de V_e .
124. Um cilindro tem volume dado V . Exprima a área total de sua superfície como função do raio r de sua base.
125. Um cone está inscrito numa esfera de raio a . Se r é o raio da base do cone, exprima seu volume como função de r .
126. Um cone está circunscrito numa esfera de raio a . Se r é o raio da base do cone, exprima seu volume como função de r .
127. Um cone tem altura H e raio de base R . Se um cilindro com raio da base r é inscrito no cone, exprima o volume do cilindro como função de r .
128. (a) Um fazendeiro tem 100 metros de cerca para construir um galinheiro retangular. Se x é o comprimento de um lado do galinheiro, mostre que a área cercada é

$$A = 50x - x^2 = 625 - (x - 25)^2.$$

Use o resultado para achar a maior área cercada possível e os comprimentos dos lados que dão essa maior área.

(b) Suponha que o fazendeiro decida construir a cerca aproveitando a parede de um celeiro de modo que ele só precise cercar três lados. Se x é o comprimento de um lado perpendicular á parede do celeiro, ache a área cercada como função de x . Ache também a maior área possível e os comprimentos dos lados que dão essa maior área.