Lista 9

Composição de funções; inversa de funções; operações sobre funções

Nos exercícios a seguir determine o domínio e a regra de $g \circ f$ e $f \circ g$

1. $f(x) = 3x + 2$ e $g(x) = -4x - 6$
2. $f(x) = x - 1$ e $g(x) = -2x + 3$
3. $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$
4. $f(x) = x^5$ e $g(x) = x^{1/4}$
5. $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
6. $f(x) = \sqrt{x - 1}$ e $g(x) = x^2$
7. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ e $g(x) = \sqrt{x + 1}$
8. $f(x) = x^2 - 1$ e $g(x) = |x|$
9. $f(x) = x^2 + x + 1$ e $g(x) = \frac{1}{x}$
10. $f(x) = -\frac{1}{x^2+1}$ e $g(x) = \frac{2}{x-2}$

    Nos exercícios a seguir determine o domínio e a regra de $f + g$, $f \cdot g$ e $\frac{f}{g}$

11. $f(x) = x^2$ e $g(x) = 3$
12. $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$
13. $f(x) = 3x^2 + 2$ se $x \geq 0$ e $g(x) = 4x^4 + 5x$ se $x \geq 1$.
14. $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$
15. $f(x) = |x|$ e $g(x) = x^2$
16. $f(x) = x^{3/4}$ e $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
17. $f(x) = x^{3/5}$ e $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
18. $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$
19. $f(x) = -\frac{1}{x-4}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2+1}$
20. $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+4}$ e $g(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$
21.
$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 4x & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x^3 & \text{se} \quad 1 < x \leq 2 \end{cases}$$
22.
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad 0 < x \leq 2 \\ \sqrt{1 + x^2} & \text{se} \quad 2 < x \leq 4 \end{cases}$$
$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{se} \quad 1 \leq x < 3 \end{cases}$$

    Nos exercícios 23-29 escreva cada função h como a composta $f \circ g$ de duas funções mais simples, f e g, nenhuma das quais seja a função identidade.

23. $h(x) = \sqrt{x - 1}$
24. $h(x) = (3x + 5)^{1/3}$
25. $h(x) = \sqrt{x^2 - 4}$
26. $h(x) = \sqrt{1 + \sqrt{x}}$
27. $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$
28. $h(x) = x^{5/3}$
29. $h(x) = x^{5/2} + x^{3/2} + x^{1/2} + 1$

    Nos exercícios 30-40 determine se a função tem inversa. Se existir inversa, dê o seu domínio e contradomínio

30. $f(x) = x - 4$
31. $f(x) = 3x + 6$
32. $f(x) = x^5$
33. $f(x) = 5x^7 + 4x^3$
34. $f(x) = -x^8$
35. $f(x) = 4\sqrt[5]{x}$
36. $g(x) = \sqrt[6]{x}$
37. $g(t) = \sqrt{t^7}$
38. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$
39. $f(x) = \sqrt{4 - x}$
40. $k(x) = x + |x|$

    Nos exercícios 41-48 encontre a inversa de cada função

41. $f(x) = -4x^3 - 1$

42. $f(x) = -2x^5 + \frac{9}{4}$

43. $g(x) = \sqrt{1+x}$

44. $g(t) = \sqrt{3-2t}$

45. $f(x) = \frac{3x+5}{x-4}$

46. $f(x) = \frac{1-2x}{5x}$

47. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

48. $k(t) = \frac{t-1}{t+1}$

49. Encontre g se $f(x) = |x|$ e $(f+g)(x) = |x| - |x-2|$.

50. Encontre g se $f(x) = (x^2-4)/(x+3)$ e $(fg)(x) = 1$ para $x \neq 2, -2$, e -3.

51. Seja f definida em $[0,4]$ e $g(x) = f(x+3)$. Qual é o domínio da g.

52. Seja f definida em $[a,b]$ e $g(x) = f(x+c)$ para um valor fixo c. Qual é o domínio de g?

53. Para quais funções f existe uma função g satisfazendo $f = g^2$.

54. Para quais funções f existe uma função g satisfazendo $f = g^3$.

55. Para quais funções f existe uma função g satisfazendo $f = 1/g$.

56. Se $f/g = g/f$ o que se pode concluir de f e g ?

57. Seja $f(x) = ax + b$, com a e b constantes. Seja p um número real arbitrário. Mostre que se $g(x) = f(x+p) - f(x)$ então g é uma função constante.

58. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c são constantes. Sejam p e q números reais. Mostre que se $g(x) = f(x+p) - f(x)$ e $G(x) = g(x+q) - g(x)$ então G é uma função constante.

59. Mostre que se f e g são funções pares então $f+g$ é uma função par.

60. Mostre que se f e g são funções pares então fg é uma função par.

61. Mostre que se f e g são funções ímpares então $f+g$ é uma função ímpar.

62. Mostre que se f e g são funções ímpares então fg é uma função par.

63. Seja $f(x)$ uma função arbitrária. Sejam $F(x) = |f(x)|$ e $G(x) = f(|x|)$. Discuta a paridade de F e G.

64. Seja $f(x) = x + 3$. Encontre uma função g tal que $f(g(x)) = \sqrt{(5x+1)/x}$.

65. Seja $f(x) = x^2 + 4$. Encontre uma função g tal que $f(g(x)) = x^2 + 2x + 6$.

66. Seja $f(x) = 1/x$. Mostre que $f(f(x)) = x$ para $x \neq 0$.

67. Seja $f(x) = 1/(x-1)$. Mostre que $f(f(f(x))) = x$ para $x \neq 0, \ \ x \neq 1$.

68. Seja $a \in R$ e $f(x) = a - x$. Mostre que $f(f(x)) = x$ para todo x real.

69. Sejam $f(x) = 1 + 2x$, e $g(x) = a + bx$. Para que constantes a e b tem-se $f \circ g = g \circ f$?

70. Sejam $f(x) = x^x$ e $g(x) = x^2$. É possível escrever x^{x^2} como uma função composta envolvendo as funções f e g?

71. Verifique se $g \circ f$ está definida nos seguintes casos
(i) $f(x) = -1 - \sqrt{x}$, e $g(x) = \sqrt{x}$
(ii) $f(x) = 1$, e $g(x) = 1/(x-1)^2$

72. Sejam f e g funções. Pode a composta $f \circ g$ ser inversível caso f ou g não sejam inversíveis?

73. Mostre que se f e g são inversíveis então $g \circ f$ tem inversa e $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Use esse resultado para mostra que a função $f(x) = (\frac{x-1}{x+1})^5$ é inversível.

74. Seja f uma função inversível. Mostre que a inversa de f^{-1} é f.

75. Assuma que g tem inversa e seja $f(x) = -x$. Usando o exercício anterior mostre que $(g \circ f)^{-1}(x) = -g^{-1}(x)$ para todo x no domínio da g^{-1}.

76. Seja f uma função inversível.

    (a) Suponha que o gráfico de f esteja no primeiro quadrante. Em que quadrante está o gráfico de f^{-1}?

    (b) Suponha que o gráfico da f esteja no segundo quadrante. Em que quadrante está o gráfico de f^{-1}?

77. Seja f uma função inversível, e seja a um número fixo. Defina $g(x) := f(x + a)$ para todo x tal que $(x + a) \in \text{Dom } f$. Mostre que g tem inversa e que $g^{-1}(x) = f^{-1}(x) - a$.

78. Seja f uma função inversível, e seja a um número fixo diferente de zero. Defina $g(x) = f(xa)$ para todo x tal que $xa \in \text{Dom } f$. Mostre que g tem inversa e que $g^{-1}(x) = f^{-1}(x)/a$.