Lista 10

Funções trigonométricas inversas

1. Encontre o valor numérico das expressões a seguir

$a)$ $\arcsin\frac{1}{2}$	$b)$ $\arccos 1$	$c)$ $\text{arccsc}\,(-1)$	$d)$ $\arctan 0$	$e)$ $\text{arccot}\,(-\sqrt{3})$
$f)$ $\arctan(-\sqrt{3})$	$g)$ $\text{arccsc}\,\sqrt{2}$	$h)$ $\text{arcsec}\,2$	$i)$ $\text{arccsc}\,2\sqrt{3}/3$	$j)$ $\text{arcsec}\,(-2)$
$k)$ $\text{arcsec}\,(-2\sqrt{3}/3)$	$l)$ $\arcsin 0$	$m)$ $\arcsin -\frac{1}{2}$	$n)$ $\arccos(-\sqrt{3}/2)$	$o)$ $\arctan 1$

2. Encontre o valor numérico das expressões a seguir

$a)$ $\sin(\arccos\frac{1}{2})$	$b)$ $\tan(\arcsin\sqrt{3}/2)$	$c)$ $\sec(\arccos\sqrt{3}/2)$	$d)$ $\csc(\arctan(-1))$	$e)$ $\sin(\arcsin(-\frac{1}{2}))$
$f)$ $\csc(\text{arccot}\,(-\sqrt{3}))$	$g)$ $\csc(\text{arcsec}\,\sqrt{2})$	$h)$ $\arcsin(\cos\pi/6)$	$i)$ $\text{arccot}\,(\tan\pi/3)$	$j)$ $\arctan(\tan 0)$

3. Mostre que

a) $\sec(\arctan x) = \sqrt{1+x^2}$ b) $\sin(\text{arccsc}\,x) = \frac{1}{x}$ c) $\cos(2\arcsin x) = 1-2x^2$

d) $\sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}$

Obs.: É possível termos $\sec(\arctan x) = -\sqrt{1+x^2}$ e $\sin(2\arcsin x) = -2x\sqrt{1-x^2}$? Explique.

4.

a) Mostre que

$$\arcsin x + \arcsin y = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

desde que o valor da expressão do lado esquerdo esteja entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. (Tal condição é usada apenas para garantir que pode-se escrever o lado esquerdo como o arco seno da expressão dada do lado direito)

b) Mostre que

$$\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x, \quad \text{com} \quad -1 < x < 1$$

c) Mostre que

$$\arctan x + \arctan y = \arctan\frac{x+y}{1-xy} \quad \text{para} \quad xy \neq 1$$

considerando que o valor da expressão do lado esquerdo esteja entre $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

d) Sejam a, b, c números satisfazendo $bc = 1 + a^2$. Mostre que

$$\arctan\frac{1}{a+b} + \arctan\frac{1}{a+c} = \arctan\frac{1}{a}$$

desde que a expressão do lado esquerdo esteja entre $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, e que tenhamos $a+b \neq 0, \quad a+c \neq 0, \quad a \neq 0$.

e) Mostre que

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\frac{x}{3}-1\right) &= \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\sqrt{1-\frac{x}{6}} \\ \arcsin\left(\frac{x}{3}-1\right) &= 2\left(\arcsin\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{6}}\right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

f) Mostre que existe uma constante c tal que se tem

$$\arcsin x + \arccos x = c, \quad \text{com} \quad -1 \leq x \leq 1$$

g) Seja $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$. Mostre que $f(x)$ é constante em cada um dos intervalos $(-\infty, 0)$ e $(0, \infty)$. Encontre as constantes.