

Lista 9

Funções Trigonométricas

I - Calculando o valor de uma função trigonométrica para um ângulo qualquer reduzindo-a a uma função trigonométrica de um ângulo agudo.

1. Expresse cada uma das expressões abaixo como função de seu ângulo agudo associado e de o seu valor.

- (a) $\sin(-\frac{7\pi}{6})$
- (b) $\cos \frac{15\pi}{4}$
- (c) $\tan(-\frac{8\pi}{3})$
- (d) $\tan \frac{33\pi}{4}$
- (e) $\sin 240^\circ$
- (f) $\cos(-135^\circ)$
- (g) $\tan 330^\circ$
- (h) $\sin 495^\circ$

2. Expresse cada uma das expressões abaixo como função de seu ângulo agudo co-relacionado e de o seu valor.

- (a) $\cos \frac{11\pi}{6}$
- (b) $\sin(-\frac{7\pi}{6})$
- (c) $\sin 120^\circ$
- (d) $\tan(-\frac{5\pi}{3})$
- (e) $\tan 510^\circ$
- (f) $\cos(-315^\circ)$

3. Simplifique (assuma x é ângulo agudo)

- (a) $\cos x + \cos(\pi - x) - \cos(\pi + x) - \cos(-x)$
- (b) $\tan x + \tan(\pi - x) + \cot(\frac{\pi}{2} - x) - \tan(2\pi - x)$
- (c) $\sin(\pi + x) + \cos(\frac{\pi}{2} - x) + \tan(\frac{\pi}{2} + x) + \tan(\frac{3\pi}{2} - x)$
- (d) $\sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin(\pi - x) + \sin(\frac{3\pi}{2} - x) + \sin(2\pi - x)$

4. Determine a cosecante, secante e cotangente de cada um dos ângulos abaixo, expressando-a em termos da cosecante, secante e cotangente de x .

- (a) $\pi - x$

(b) $\frac{\pi}{2} + x$

(c) $\pi + x$

(d) $\frac{3\pi}{2} + x$

5. Simplifique

(a) $\sin(x - \pi)$

(b) $\cos(x - \frac{\pi}{2})$

(c) $\tan(-x - \pi)$

6. Determine

(a) $\sec(\pi + \frac{\pi}{3})$

(b) $\csc(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6})$

(c) $\cot(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})$

(d) $\sec(\frac{3\pi}{4})$

(e) $\csc(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4})$

(f) $\cot(-\pi + \frac{\pi}{4})$

7. Simplifique

- (a)

$$\frac{\cos(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x)}{\cos(\pi - x)} - \frac{\sin(\frac{3\pi}{2} - x)}{\sec(\pi + x)}$$

- (b)

$$\frac{\sin(x - \frac{\pi}{2})}{\cos(\pi - x)} + \frac{\tan(x - \frac{3\pi}{2})}{-\tan(\pi + x)}$$

8. Se A , B , C são ângulos de um triângulo mostre que $\sin B = \sin(A + C)$.

II - Fórmulas de adição e subtração

9. Expresse como uma única função trigonométrica.

(a) $\cos 2a \cos a - \sin 2a \sin a$

(b) $\cos x \cos 4x + \sin x \sin 4x$

(c) $\sin 5 \cos 2 - \cos 5 \sin 2$

(d) $\sin 2m \cos m + \cos 2m \sin m$

(e) $\frac{\tan 2a + \tan 3a}{1 - \tan 2a \tan 3a}$

(f) $\frac{\tan 7 - \tan 9}{1 + \tan 7 \tan 9}$

(g) $\cos^2 x - \sin^2 x$

(h) $\sin a \cos a + \cos a \sin a$

(i) $\frac{\tan x + \tan x}{1 - \tan^2 x}$

(j) $\cos^2 2 + \sin^2 2$

10. Determine os valores das expressões abaixo usando as fórmulas de adição e subtração

(a) $\sin \frac{11\pi}{12}$

(b) $\cos \frac{13\pi}{12}$

(c) $\tan(-\frac{7\pi}{12})$

(d) $\tan(-\frac{5\pi}{12})$

(e) $\sin 75^\circ$

(f) $\cos(-15^\circ)$

11. Encontre o valor de cada expressão

(a) $\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3})$

(b) $\cos(-\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4})$

(c) $\tan(-\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi}{3})$

12. Se x e y estão no intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$ e $\sin x = \frac{3}{5}$ e $\cos y = \frac{12}{13}$, determine cada uma das expressões abaixo

(a) $\sin(x - y)$

(b) $\cos(x - y)$

(c) $\tan(x + y)$

13. Se x está no intervalo $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ e y está no intervalo $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ e $\cos x = -\frac{5}{13}$ e $\tan y = \frac{4}{3}$ determine cada uma das expressões abaixo

(a) $\sin(x + y)$

(b) $\cos(x - y)$

(c) $\tan(x - y)$

14. Encontre o valor exato de cada expressão abaixo.

(a) $\sin 50^\circ \cos 20^\circ - \cos 50^\circ \sin 20^\circ$

(b) $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{4\pi}{21} - \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{21}$

(c) $\frac{\tan 7^\circ + \tan 8^\circ}{1 - \tan 7^\circ \tan 8^\circ}$

(d) $\sin \frac{5\pi}{36} \cos \frac{5\pi}{18} + \cos \frac{5\pi}{36} \sin \frac{5\pi}{18}$

15. Usando as fórmulas de soma e subtração para seno, cosseno e tangente mostre que

(a) $\sin(\pi + x) = -\sin x$

(b) $\tan(2\pi - x) = -\tan x$

(c) $\cos(\frac{3\pi}{2} + x) = \sin x$

(d) $\sin(\frac{3\pi}{2} - x) = -\cos x$

(e) $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

(f) $\sin(x - \pi) = -\sin x$

(g) $-\tan(-x - \pi) = \tan x$

16. Mostre que

(a) $\sin x + \sin y = 2 \cos \frac{x-y}{2} \sin \frac{x+y}{2}$

(b) $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

(c) $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

(d) $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$

17. Expresse cada uma das expressões abaixo como um produto, depois simplifique [Sugestão: Use o exercício anterior].

(a) $\sin 60^\circ + \sin 20^\circ$

(b) $\cos 70^\circ - \cos 110^\circ$

(c) $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ$

(d) $\sin 6x - \sin 2x$

(e) $\sin 130^\circ - \sin 40^\circ$

(f) $\cos 4x - \cos 2x$

18. Simplifique

(a)

$$\frac{\sin(x - 30^\circ) + \cos(60^\circ - x)}{\sin x}$$

(b)

$$\frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x) - \tan(\frac{\pi}{4} + x)}{\tan x}$$

(c)

$$\frac{\cos 4x + \cos 3x}{\sin 4x - \sin 3x}$$

19. Se $\sin x = -\frac{1}{3}$, $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ e $\cos y = \frac{2}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < y < 2\pi$, determine o valor de $\sec(x - y)$.

20. Expresse $\csc(x + y)$ em termos de secantes e cosecantes de x e y .

21. Desenvolva uma fórmula para $\sin(x + y + z)$. [Sugestão: Considere $\sin((x + y) + z)$]

22. Se x, y, z são ângulos no segundo quadrante e $\cos x = -\frac{1}{3}$, $\sin y = \frac{1}{4}$, $\sin z = \frac{1}{5}$ determine o valor de $\cos(x + y - z)$.
23. Se $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{1}{2}$ e $\frac{\cos x}{\cos y} = 3$ mostre que
- (a) $\sin(x + y) = \frac{7}{3} \sin x \cos x$
 (b) $\cos(x + y) = \frac{7 \cos^2 x - 6}{3}$
24. Se $2 \sin(x - y) = \sin(x + y)$ mostre que $\tan x = 3 \tan y$.
25. Se $\tan(\frac{\pi}{4} + x) = 3 \tan(\frac{\pi}{4} - x)$ determine o valor de $\tan x$.
26. Simplifique
- (a) $\cos(\frac{3\pi}{4} + x) + \sin(\frac{3\pi}{4} - x)$
 (b) $\cos(\frac{\pi}{12} - x) \sec \frac{\pi}{12} - \sin(\frac{\pi}{12} - x) \csc \frac{\pi}{12}$
 (c) $\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y} + \frac{\sin(z-x)}{\cos z \cos x} + \frac{\sin(y-z)}{\cos y \cos z}$
29. Determine $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$ sabendo que $\cos \theta = -\frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$.
30. Determine $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$ sabendo que $\sin \theta = \frac{12}{13}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
31. Determine $\sin 4\theta$ sabendo que $\sin \theta = \frac{2}{3}$, $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.
32. Determine $\csc 2\theta$ e $\sec 2\theta$ sabendo que $\cos \theta = \frac{2}{5}$, $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$.
33. Determine $\tan 2a$ sabendo que $\tan a = \frac{1}{2}$, $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.
34. Determine $\tan 4a$ sabendo que $\tan a = 2$, $-2\pi \leq a \leq -\frac{3\pi}{2}$.
35. Obtenha fórmulas para
- (a) $\sin 3\theta$ em termos de $\sin \theta$
 (b) $\cos 3\theta$ em termos de $\cos \theta$
 (c) $\tan 3\theta$ em termos de $\tan \theta$
 (d) $\cos 4\theta$ em termos de $\cos \theta$

III - Formulas envolvendo duplicação do ângulo

27. Use as expressões envolvendo duplicação do ângulo para reescrever cada uma das expressões abaixo
- (a) $\cos 2(2x)$
 (b) $\sin 3x$
 (c) $\tan 6x$
 (d) $\sin \frac{1}{2}x$
 (e) $\cos \frac{2}{3}x$
 (f) $\tan(-7x)$
28. Reduza as expressões a seguir a uma função que seja seno ou cosseno
- (a) $2 \sin 3\theta \cos 3\theta$
 (b) $6 \sin \theta \cos \theta$
 (c) $\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$
 (d) $\cos^2 \frac{3\theta}{2} - \sin^2 \frac{3\theta}{2}$
 (e) $1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{4}$
 (f) $2 \cos^2(\frac{7}{2}\theta) - 1$
 (g) $8 \sin^2 2\theta - 4$
 (h) $1 - 2 \sin^2(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$
36. Encontre o valor exato.
- (a) $\sin 67\frac{1}{2}^\circ$
 (b) $\cos 112\frac{1}{2}^\circ$
 (c) $\tan 22.5^\circ$
 (d) $\sin(-\frac{\pi}{8})$
 (e) $\cos \frac{\pi}{16}$
 (f) $\tan 33.75^\circ$
37. (a) Expresse $\sin \frac{\theta}{2}$ em termos de $\cos \theta$.
 (b) Expresse $\cos \frac{\theta}{2}$ em termos de $\cos \theta$.
 (c) Expresse $\tan \frac{\theta}{2}$ em termos de $\cos \theta$.
38. Se $\cos x = -\frac{12}{13}$ e $x \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, determine
- (a) $\sin \frac{x}{2}$
 (b) $\cos \frac{x}{2}$
 (c) $\tan \frac{x}{2}$
39. Expresse $\sin 2\theta$ e $\cos 2\theta$ em termos de $\tan \theta$.
40. Expresse $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$ em termos de $\tan x$.

41. Expresse $\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$ como uma função trigonométrica de $2x$.

42. Se $\cos \theta + \sin \theta = \frac{2}{3}$, determine $\sin 2\theta$.

43. Se $\cos \theta + \sin \theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ e $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ determine o valor de $\sin 2\theta$.

44. Se $2a + b = \frac{\pi}{2}$, mostre que $\cos a = \pm \sqrt{\frac{1+\sin b}{2}}$.

45. Se $\tan a = \frac{1}{5}$ e $\tan b = \frac{1}{239}$, determine o valor de $\tan(4a - b)$.

46. Se $\sec 4\theta - \sec 2\theta = 2$, determine o valor de $\cos^2 \theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

47. Simplifique $\sin^2(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{8} - \frac{\theta}{2})$.

IV - Identidades trigonométricas

48. $\sin x \tan x = \sec x - \cos x$

49. $\cos^4 x - \sin^4 x = 1 - 2 \sin^2 x$

50. $\csc^2 x + \sec^2 x = \csc^2 x \sec^2 x$

51. $\cos^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y + \sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 y \cos^2 x = 1$

52. $\sec^2 x - \sec^2 y = \tan^2 x - \tan^2 y$

53. $\frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y} = \tan x \tan y$

54. $(\sec x - \cos x)(\csc x - \sin x) = \frac{\tan x}{1 + \tan^2 x}$

55. $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3 \sin^2 x + 3 \sin^4 x$

56. $\sec^6 x - \tan^6 x = 1 + 3 \tan^2 x \sec^2 x$

As identidades a seguir envolvem a fórmula de adição e subtração

57. $1 + \cot x \tan y = \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cos y}$

58. $\cos(x+y) \cos y + \sin(x+y) \sin y = \cos x$

59. $\sin x - \tan y \cos x = \frac{\sin(x-y)}{\cos y}$

60. $\cos(\frac{3\pi}{4} + x) + \sin(\frac{3\pi}{4} - x) = 0$

61.

$$\frac{\tan(\frac{\pi}{4} + x) - \tan(\frac{\pi}{4} - x)}{\tan(\frac{\pi}{4} + x) + \tan(\frac{\pi}{4} - x)} = 2 \sin x \cos x$$

62. $\sin(x+y) \sin(x-y) = \cos^2 y - \cos^2 x$

63. $\tan(x+y) \tan(x-y) = \frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\cos^2 x - \sin^2 y}$

64. $\frac{\tan(x-y) + \tan y}{1 - \tan(x-y) \tan y} = \tan x$

65. $\sin 5x = \sin x (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \cos x \cos 2x \sin 2x$

As identidades a seguir envolvem ângulos relacionados e co-relacionados.

66. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) \cot(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$

67. $\cos(-x) + \cos(\pi - x) = \cos(\pi + x) + \cos x$

68.

$$\frac{\sin(\pi - x) \cot(\frac{\pi}{2} - x) \cos(2\pi - x)}{\tan(\pi + x) \tan(\frac{\pi}{2} + x) \sin(-x)} = \sin x$$

69.

$$\frac{\sin(-x)}{\sin(\pi + x)} - \frac{\tan(\frac{\pi}{2} + x)}{\cot x} + \frac{\cos x}{\sin(\frac{\pi}{2} + x)} = 3$$

70.

$$\frac{\csc(\pi - x) \cos(-x)}{\sec(\pi + x) \cos(\frac{\pi}{2} + x)} = \cot^2 x$$

71.

$$\frac{\cos(\frac{\pi}{2} + x) \sec(-x) \tan(\pi - x)}{\sec(2\pi + x) \sin(\pi + x) \cot(\frac{\pi}{2} - x)} = -1$$

72.

$$\frac{\sin(\pi - x) \cos(\pi + x) \tan(2\pi - x)}{\sec(\frac{\pi}{2} + x) \csc(\frac{3\pi}{2} - x) \cot(\frac{3\pi}{2} + x)} = \sin^4 x - \sin^2 x$$

As identidades a seguir envolvem a fórmula de ângulo duplo

73. $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$

74. $\frac{1 + \cos x}{\sin x} = \cot \frac{x}{2}$

75. $2 \csc 2x = \sec x \csc x$

76. $2 \cot 2x = \cot x - \tan x$

77. $\frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} = \tan(\frac{\pi}{4} - x)$

78. $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = \sec 2x - \tan 2x$

79. $\frac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x} = \tan x$

80. $\cos^6 x - \sin^6 x = \cos 2x (1 - \frac{1}{4} \sin^2 2x)$

81. $4(\cos^6 x + \sin^6 x) = 1 + 3 \cos^2 2x$

82. $\sec x - \tan x = \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$

$$83. \frac{\sin 2x}{1+\cos 2x} \frac{\cos x}{1+\cos x} = \tan \frac{x}{2}$$

As identidades a seguir envolvem o uso de fórmulas e relações diversas

$$84. \sin^2 x + \cos^4 x = \cos^2 x + \sin^4 x$$

$$85. \tan x - \cot x = (\tan x - 1)(\cot x + 1)$$

$$86. \cos x = \sin x \tan^2 x \cot^3 x$$

$$87. (\sin x + \cos x)(\tan x + \cot x) = \sec x + \csc x$$

$$88. \sin^4 x + \cos^4 x = \sin^2 x (\csc^2 x - 2 \cos^2 x)$$

$$89. \sin^3 x + \cos^3 x = (1 - \sin x \cos x)(\sin x + \cos x)$$

$$90. \cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) \sec \frac{\pi}{12} - \sin\left(\frac{\pi}{12} - x\right) \csc \frac{\pi}{12} = 4 \sin x$$

$$91. \tan(x - y) + \tan(y - z) = \frac{\sec^2 y (\tan x - \tan z)}{(1 + \tan x \tan y)(1 + \tan y \tan z)}$$

$$92. \sin 8x = 8 \sin x \cos x \cos 2x \cos 4x$$

$$93. \sin x = 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$$

$$94. \sin(x + y) + \sin(x - y) = 2 \sin x \cos y$$

95.

$$\frac{\sin(x - y)}{\sin x \sin y} + \frac{\sin(y - z)}{\sin y \sin z} + \frac{\sin(z - x)}{\sin z \sin x} = 0$$

$$96. \tan x + \tan(\pi - x) + \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \tan(2\pi - x)$$

$$97. \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \cos(\pi - x) \cot\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cot\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

$$98. \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cot\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \tan(2\pi - x) - \cot(\pi - x) = \frac{4 - 2 \sec^2 x}{\tan x}$$

$$99. \tan(x + y + z) = \frac{\tan x + \tan y + \tan z - \tan x \tan y \tan z}{1 - \tan x \tan y - \tan x \tan z - \tan y \tan z}$$

$$100. \csc^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1 + \sin^2 x \csc^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$101. \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2 \sec 2x$$

$$102. \frac{1 - \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x}$$

$$103. \frac{\sin 4x}{1 - \cos 4x} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 2x} = \tan x$$

IV - Equações trigonométricas

104. Resolva as equações para x no intervalo $[0, 2\pi]$

(a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) $\cos x = \frac{1}{2}$

(c) $\tan x = -1$

(d) $\sec x = -2$

(e) $\sin x = -\frac{1}{2}$

(f) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

105. Resolva as equações para x no intervalo $[-\pi, 0]$

(a) $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(b) $\tan^2 x = \tan x$

(c) $\sin^2 x - \sin x = 2$

(d) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

(e) $(2 \csc x - 1)^2 = 9$

106. Resolva as equações para x nos intervalos especificados

(a) $\sin x - \sin x \tan x = 0, \quad x \in [0, \pi]$

(b) $\sin x \tan 3x = 0, \quad x \in [-\pi, 0]$

(c) $6 \sin^2 x - 5 \cos x - 2 = 0, \quad x \in [0, 2\pi]$

(d) $\sqrt{2} \sin x + \tan x = 0, \quad x \in [-\pi, \pi]$

(e) $\cos^2 x - 3 \sin^2 x = 1, \quad [-2\pi, 2\pi]$

(f) $2 \tan x = \sec x, \quad [-2\pi, 0]$

107. Resolva para x

(a) $\cos 2x = \cos^2 x, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

(b) $\sin 2x = \cos x, \quad -\pi \leq 2x \leq \pi$

(c) $\cos^2 x - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = 0, \quad 0 \leq 2x \leq \pi$

(d) $\tan 2x = 8 \cos^2 x - \cot x, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

(e) $\tan x + \sec 2x = 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

(f) $2(\sin^4 x + \cos^4 x) = 1, \quad -\pi \leq x \leq \pi$

108. Resolva a equação

$$2 \tan x \cos^2 x + \sin x \tan x - 2 \tan x = 0 \text{ com } |x| < 2\pi$$

109. Determine os valores de $\sin x$ e $\cos x$ sabendo que $\tan 2x = -\frac{24}{7}$

110. Se $x \sin A + y \cos A = p$ e $x \cos A - y \sin A = q$, encontre $x^2 + y^2$.

111. Se $\sin A + \cos A = p$ e $\tan A + \cot A = q$ mostre que $q(p^2 - 1) = 2$.