IV

Números Reais

Def.: Conjunto dos Números Reais

O conjunto dos números reais denotado por $\mathbb{R}$, é um conjunto de elementos (ditos números reais) satisfazendo as seguintes condições (ditos axiomas):

Axiomas de Adição

Tem-se definido uma operação:

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow x+y$$

que associa a cada par (x,y) de números reais um número real denotado por $x+y$, dito a soma de x e y, satisfazendo as propriedades:

A1. $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tq. $x+0 = 0+x$,

$\forall x \in \mathbb{R}$

A.2 $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists\, -x \in \mathbb{R}$ tq.

$$x+(-x) = (-x)+x = 0$$

A.3 A operação $+$ é associativa, i.e. tem-se:

$$x+(y+z) = (x+y)+z$$

$\forall x,y,z \in \mathbb{R}$

A.4 A operação $+$ é comutativa, i.e. tem-se

$$x+y = y+x, \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Obs.: i) 0 em A.1 é dito <u>elemento neutro aditivo</u> ou <u>zero</u>.

ii) $-x$ em A.2 é dito o <u>negativo de x</u> (ou oposto de x)

iii) Se uma operação definida em um conjunto G satisfaz A.1, A.2, A.3 diz-se que <u>G é um grupo</u>.

Se G satisfaz A1., A2., A3. A.4 diz-se que G é um <u>grupo comutativo</u> ou <u>grupo Abeliano</u>.

Assim, axiomas A1, A2, A3, A4 nos dizem que <u>IR é um grupo Abeliano</u>.

<u>Axiomas da Multiplicação</u>

Tem-se definida uma operação

$$\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to x\cdot y$$

que associa a cada par (x,y) de números reais um número real denotado por $x\cdot y$, dito <u>o produto de x e y</u>, satisfazendo as propriedades :

M1. $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ tal que

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

M2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\exists\, x^{-1} \in \mathbb{R}$ tq.

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = \underline{1}$$

M3. A operação $\cdot$ é associativa, i.e. tem-se:

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z, \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

M4. A operação $\cdot$ é comutativa, i.e. tem-se:

$$x \cdot y = y \cdot x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Obs. i) 1 em M1 é dito o elemento neutro multiplicativo ou <u>um</u>.

ii) x^{-1} em M2 é dito <u>o inverso</u> ou <u>recíproco</u> de x

iii) Com relação a multiplicação tem-se $\mathbb{R}-\{0\}$ grupo abeliano

Distributividade

A Multiplicação é distributiva em relação a adição i.e.

$$(x+y)\cdot z = x\cdot z + y\cdot z$$

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$$

Obs. Um conjunto G munido de duas operações $+$, $\cdot$ satisfazendo A1, A2, A3, A4, M1, M2, M3, M4, D é dito um corpo.

Axiomas de Ordem

Existe uma relação em $\mathbb{R}$ denotada por

$$R_{\leq} \equiv \{(x,y) : x \leq y, \; x,y \in \mathbb{R}\}$$

e definida por uma propriedade $\leq$ (i.e., $\forall x,y \in \mathbb{R}$ pode-se determinar se $x \leq y$ ou não)

Satisfazendo os axiomas:

O1. $\forall x \in \mathbb{R}, (x \leq x)$ (Reflexiva)

$(\forall x \in \mathbb{R}, (x,x) \in R_{\leq})$

O2. $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$

$\big(((x,y) \in R_{\leq}) \wedge ((y,x) \in R_{\leq}) \Rightarrow x = y \big)$

O3. $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)

$\Big(\big((x,y) \in R_{\leq}\big) \wedge \big((y,z) \in R_{\leq}\big) \Rightarrow \big((x,z) \in R_{\leq}\big) \Big)$

O4. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \vee (y \leq x)$

$(\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \; (x,y) \in R_{\leq} \vee (y,x) \in R_{\leq})$

(I, III) Conexão entre adição e ordem em $\mathbb{R}$

$$(x \leq y) \Longrightarrow x+z \leq y+z$$

$\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$

(II, III) Conexão entre multiplicação e ordem em $\mathbb{R}$

$$(0 \leq x) \wedge (0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq x \cdot y)$$

$\forall\, x, y \in \mathbb{R}$

(IV) Axioma da Completeza

Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}$, $X, Y \neq \emptyset$ tq.

$x \leq y$, $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$.

Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tq

$$x \leq c \leq y$$

obs.

i) Um conjunto onde se tem definido uma relação satisfazendo O1, O2, O3 é dito parcialmente ordenado.

ii) Um conjunto onde se tem definido uma relação satisfazendo O1, O2, O3, O4 é dita linearmente ordenado.

iii) Por um abuso de linguagem também nos referimos a propriedade $\leq$ que define a relação $R_{\leq}$ como sendo uma relação, neste caso dita desigualdade

Lê-se:

$$\boxed{x \leq y \ : \ x \text{ é menor ou igual a } y}$$

Equivalentemente podemos escrever

$$\boxed{y \geq x \ : \ y \text{ é maior ou igual a } x}$$

$(x \leq y) \equiv (y \geq x)$

representando a mesma relação. →

Também:

- $x < y$ (lê-se x é menor que y) é uma relação definida por

$$\boxed{x < y \leftrightarrow x \neq 0 \wedge x \leq y}$$

- $y > x$ (lê-se y é maior que x) é uma relação definida por

$$\boxed{y > x \leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \geq x}$$

e temos a equivalência

$$(x < y) \equiv (y > x)$$

Def: Número positivo e negativo

- Diz-se que $x \in \mathbb{R}$ é positivo se $x \neq 0 \wedge 0 \leq x$ o que é denotado como $0 < x$.

- Diz-se que $x \in \mathbb{R}$ é negativo se $x \neq 0 \wedge x \leq 0$ o que é denotado como $x < 0$.

- Diz-se que x é menor que y ou equivalentemente que y é maior que x se $x \neq y \wedge x \leq y$.

Algumas propriedades algébricas dos números reais

1. Consequências dos axiomas de adição

1.1) O elemento neutro aditivo é único

Demonstração

Sejam $0, \bar{0} \in \mathbb{R}$ dois elementos

Satisfazendo A1:

$$\begin{cases} x+0 = x \quad , \forall x \in \mathbb{R} \\ x+\bar{0} = x \quad , \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Então

$$\bar{0}+0 = \bar{0}$$

$$0+\bar{0} = 0$$

Mas $\underbrace{\bar{0}+0}_{\bar{0}} = \bar{0}+0 \quad [A.4]$

$$\bar{0} = 0$$

$\therefore$ O elemento neutro aditivo é único.

1.2) Cada elemento $x \in \mathbb{R}$ tem um único oposto $-x$

Demonstração

Seja $x \in \mathbb{R}$

Sejam x_1, x_2 opostos de x,

i.e. $x + x_1 = 0$

$x + x_2 = 0$

Seja

$$x_1 = x_1 + 0 \quad (A1)$$

$$= x_1 + (x + x_2) \quad (A.2)$$

$$= (x_1 + x) + x_2 \quad (A.3)$$

$$= 0 + x_2 \quad (A.2)$$

$$= x_2 \quad (A.1)$$

$\therefore$ $x_1 = x_2$

$\therefore$ O oposto do $x \in \mathbb{R}$ é único

1.3) Em $\mathbb{R}$, a eq. $a+x=b$ tem uma única solução $x=b+(-a)$

Demonstração

Seja $a, x, b \in \mathbb{R}$ tq.

$a+x=b$

$\therefore (a+x)+(-a) = b+(-a)$ [A.2]

$(x+a)+(-a) = b+(-a)$ [A.4]

$x+(a+(-a)) = b+(-a)$ [A.3]

$x+0 = b+(-a)$ [A.2]

$x = b+(-a)$ [A.1]

Denota-se : $\underline{b+(-a) \doteq b-a}$.

2. Consequências do axioma da mult.

2.1) O elemento neutro multiplicativo é único

Sejam

$1, \bar{1}$ elementos neutros multiplicativos

Então $x \cdot 1 = x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$

$x \cdot \bar{1} = x \quad , \forall x \in \mathbb{R}$.

Então

$\bar{1} \cdot 1 = \bar{1}$

$1 \cdot \bar{1} = 1$

Mas $\bar{1} \cdot 1 = 1 \cdot \bar{1} \quad (M4)$

$\therefore \quad \bar{1} = 1$.

$\therefore$ O elemento neutro multiplicativo é único.

2.2) Cada elemento $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ tem um único inverso

Demonstração

Seja $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$

Seja x_1^{-1}, x_2^{-1} inversos de x.

Então

$$x \cdot x_1^{-1} = 1 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \, , \, x \neq 0$$

$$x \cdot x_2^{-1} = 1 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R} \, , \, x \neq 0$$

Seja

$$x_1^{-1} = x_1^{-1} \cdot 1 \qquad [M.1]$$

$$= x_1^{-1} (x \cdot x_2^{-1}) \qquad [M2]$$

$$= (x_1^{-1} \cdot x) \, x_2^{-1} \qquad [M3]$$

$$= 1 \cdot x_2^{-1} \qquad [M2]$$

$$= x_2^{-1} \qquad [M1]$$

$\therefore \; x_1^{-1} = x_2^{-1}$

O inverso de $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ é único.

2.3) Em $\mathbb{R}$, a equação

$$ax = b \quad (a \neq 0)$$

tem uma única solução $x = a^{-1} \cdot b$

Demonstração

Seja $a \neq 0$

$$ax = b.$$

$$\therefore \quad a^{-1}(ax) = a^{-1} b \qquad [M2]$$

$$(a^{-1} \cdot a)\, x = a^{-1} \cdot b \qquad [M3]$$

$$1 \cdot x = a^{-1} \cdot b \qquad [M2]$$

$$x = a^{-1} \cdot b \qquad [M1]$$

3. Consequências do Axioma da Distributividade

3.1) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Demonstração

$x \cdot 0 = x \cdot (0+0)$ [A.1]

$x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0$ [D]

$(b \quad a + x)$

$x \cdot 0 = x \cdot 0 + (-x \cdot 0)$ [1.3]

$= 0$ [A.2]

Obs.- Se $x \neq 0$ então $x^{-1} \neq 0$.

De facto:

Se $x^{-1} = 0$ então do resultado anterior teríamos $x \cdot x^{-1} = 0$.

Mas $x \cdot x^{-1} = 1$ (de M2]

e $1 \neq 0$, logo $x^{-1} \neq 0$.

3.2) $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

Seja $x \cdot y = 0$.

Suponha $y \neq 0$.

Então

$$x \cdot y = 0$$

$$(x \cdot y) y^{-1} = 0 \cdot y^{-1}$$

$$x \cdot (y y^{-1}) = 0 \quad \text{(Multi. ant.)}$$

$$x \cdot 1 = 0$$

$$x = 0$$

$\therefore$ $x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$

3.3) $\forall x \in \mathbb{R}, \; (-1)\cdot x = -x$

Demonstração

Seja

$$x + (-1)\cdot x$$

temos

$$x + (-1)\cdot x = 1\cdot x + (-1)x \quad [A.1]$$

$$x + (-1)\cdot x = \left(1 + (-1)\right)\cdot x \quad [D]$$

$$x + (-1)\cdot x = 0\cdot x \quad [A2]$$

$$x + (-1)x = 0 \quad [3.2]$$

$$\therefore \quad (-1)x = -x \quad [A.2]$$

3.4) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (-1)(-x) = x$.

Demonstração

Seja $(-1)(-x)$.

De (3.3):

$$(-1)(-x) = -(-x)$$

Mas

$$(-x) + (-(-x)) = 0 \quad \text{(def. oposto de } -x\text{)}$$

$$(-x) + x = 0 \quad \text{(def oposto de } x\text{)}$$

Da unicidade do oposto de $(-x)$

tem-se $\quad -(-x) = x$

$$\therefore \boxed{(-1)(-x) = x = -(-x)}$$

3.5) $\forall x \in \mathbb{R}$, $(-x)(-x) = x \cdot x$

Demonstração

$$(-x)(-x) \overset{(3.3)}{=} ((-1)\cdot x)(-x) \overset{(M.4)}{=} (x\cdot(-1))(-x) =$$

$$\overset{(M.3)}{=} x \cdot ((-1)(-x))$$

$$\overset{(3.4)}{=} x \cdot x \quad .$$

4. Consequências dos Axiomas de Ordem

4.1. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ tem-se uma das seguintes relações:

$$x < y \ , \ x = y \ , \ x > y$$

Demonstração

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$.

De O4:

$$(x \leq y) \vee (y \leq x)$$

Podemos ter

i) $x \leq y \wedge y \leq x$

ou ii) $(x \leq y) \wedge \sim (y \leq x)$

ou iii) $\sim (x \leq y) \wedge (y \leq x)$

Caso (i):

Se $x \leq y \wedge y \leq x$ então de O2 tem-se

$\underline{x = y}$.

Caso (ii)

Seja $(x \leq y) \wedge \sim(y \leq x)$.

Isto é:

$x \leq y$ (V) (1)

$y \leq x$ (F) (2)

Suponha $x = y$. (✱)

Então de (1) : $x \leq x$ (V)

(2) : $x \leq x$ (F)

O que é absurdo.

Logo a suposição feita em (✱) é falsa,

i.e., $x \neq y$. (3)

De (1) e (3):

$x \neq y \wedge x \leq y$

$\therefore \quad x < y$

Caso (iii)

Seja $\sim(x \leq y) \wedge (y \leq x)$

Analogamente ao caso (ii) obter-se-á

$y < x$

Isto é:

$$\boxed{\begin{array}{l}\forall x, y \in \mathbb{R} \text{ tem-se uma das} \\ \text{seguintes proposições:} \\ \qquad x < y \ , \ x = y \ , \ y < x\end{array}}$$

4.2. $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$,

(i) $(x<y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x<z$

(ii) $(x \leq y) \wedge (y<z) \Rightarrow x<z$

Demonstração

(i) Seja $(x<y) \wedge (y \leq z)$

Mas $x<y \Longleftrightarrow x \neq y \wedge x \leq y$ (definição)

$\therefore$ $x \neq y \wedge (x \leq y) \wedge (y \leq z)$ (1)

De O3: $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (2)

e (1) fica:

$x \neq y \wedge (y \leq z)$ (3)

Suponha $x=z$. (4).

Então de (1): $(x \leq y) \wedge (y \leq x)$

Mas de O2: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x=y$

o que contraria $x \neq y$ em (3).

Logo, a suposição feita em (4) é falsa,

i.e.

$x \neq z$ (5).

De (2) e (5):

$x \neq z \wedge x \leq z$

$\therefore$ $\underline{x < z}$.

(ii) Prova análoga ao caso (i)

5. Consequências dos axiomas relacionando ordem com adição e multiplicação

5.1.

$\forall x, y, z, w \in \mathbb{R}$

i) $(x < y) \Rightarrow (x+z) < (y+z)$

ii) $(0 < x) \Rightarrow (-x < 0)$

iii) $(x \leq y) \wedge (z \leq w) \Rightarrow (x+z) \leq (y+w)$

iv) $(x \leq y) \wedge (z < w) \Rightarrow (x+z) < (y+w)$

Demonstração

i) Seja $x < y$.

Por definição:

$$x < y \Longleftrightarrow x \neq y \wedge x \leq y. \quad (1)$$

De $(\mathrm{I}, \mathrm{III})$: $\quad x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \quad (2)$

Suponha que:

$$x+z = y+z \quad (3)$$

$$\therefore (x+z)+(-z) = (y+z)+(-z)$$

$x+(z+(-z)) = y+(z+(-z))$

$x+0 = y+0$

$x = y$

o que contraria (1).

Logo, a suposição feita em (3) é falsa, i.e. devemos ter

$x+z \neq y+z$. (4)

De (2),(4):

$\underline{x+z < y+z}$.

---

iv) Seja $0 < x$.

Por definição: $x \neq 0$, $0 \leq x$ (1)

De (I, III): $0+(-x) \leq x+(-x)$

$-x \leq 0$ (2)

De (1),(2): $x \neq 0$, $-x \leq 0$

$\therefore$ $\underline{-x < 0}$

iii) Seja $(x \leq y) \wedge (z \leq w)$.

De (I, III):

$$x \leq y \Rightarrow x+z \leq y+z \quad (1)$$

$$z \leq w \Rightarrow z+y \leq y+w \quad (2)$$

Mas $z+y = y+z$, logo de (1), (2) e O3:

$$\underline{x+z \leq y+w}\ .$$

---

iv) Seja $(x \leq y) \wedge (z < w)$ (+)

$$x \leq y \xRightarrow{(I,III)} \underline{x+z \leq y+z} \quad (2)$$

$$z < w \xRightarrow{(5i)} z+y < w+y$$

$$\therefore \underline{y+z < w+y} \quad (3)$$

De (2), (3):

$$(x+z \leq y+z) \wedge (y+z < w+y) \xRightarrow{4(iii)}$$

$$x+z < w+y$$

$$\therefore \boxed{x+z < y+w}$$

5.2

i) $0 < x \iff -x < 0$

ii) $x < 0 \iff 0 < -x$

Demonstração

i) Seja $0 < x$.

$0+(-x) < x+(-x)$ [5.1 (i)]

$-x < 0$ [A.1, A.2]

Seja $-x < 0$

$-x+x < 0+x$ [5.1 (i)]

$0 < x$ [A.2, A.1]

$\therefore$ $\boxed{-x < 0 \iff 0 < x}$

i*) Note que o enunciado

$$x < 0 \iff 0 < -x$$

é equivalente ao enunciado (i*).

De fato: tome em (i*) $x = -y$,

$$\therefore \quad 0 < -y \iff -(-y) < 0$$

$$y < 0$$

$$\therefore \quad \boxed{0 < -y \iff y < 0}$$

5.3 $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

i) $(0<x) \wedge (0<y) \Longrightarrow (0<xy)$

ii) $(x<0) \wedge (y<0) \Longrightarrow (0<xy)$

iii) $(x<0) \wedge (0<y) \Longrightarrow (xy<0)$

iv) $(x<y) \wedge (0<z) \Longrightarrow (xz<yz)$

v) $(x<y) \wedge (z<0) \Longrightarrow (yz<xz)$

Demonstração

i) Seja $(0<x) \wedge (0<y)$.

$0<x \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} x \neq 0 \wedge 0 \leq x$ (1)

$0<y \overset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} y \neq 0 \wedge 0 \leq y$ (2)

De (II, III):

$0 \leq x,\ 0 \leq y \Longrightarrow 0 \leq xy$ (3)

De (1), (2): $x \neq 0 \wedge y \neq 0$

Mas $x \neq 0 \wedge y \neq 0 \Longrightarrow \underset{(4)}{x \cdot y \neq 0}$ (Ex. 15 - Lista 1)

De (4) e (3): $x \cdot y \neq 0 \wedge 0 \leq xy$

$\therefore \boxed{0<xy}$

ii)

Seja $x<0 \wedge y<0$

Mas $x<0 \xRightarrow{5.2(i)} 0<-x$
$y<0 \xRightarrow{5.2(i)} 0<-y$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\xRightarrow{5.3(i)} 0<(-x)(-y) = xy$ [Ex. 26 Lista 1]

$\therefore \underline{0<xy}$.

iii) Seja $x<0 \wedge 0<y$ (1)

Mas $x<0 \xRightarrow{5.2(i)} 0<-x$ (2)

Mas $(0<y) \wedge (0<-x) \xRightarrow{5.3(i)} 0<(-x)\cdot y \equiv -(x\cdot y)$

$\therefore \underline{xy<0}$.

(5.2(ii))

iv) Seja $(x<y) \wedge (0<z)$

$$x<y \Rightarrow x+(-x) < y+(-x) \quad [5.1(i)]$$
$$0 < y+(-x) \quad [4.2]$$

$\therefore$

$$\left.\begin{array}{l} 0<z \\ 0<y+(-x) \end{array}\right\} \Rightarrow 0 \overset{5.3(i)}{<} z(y+(-x))$$
$$0 \overset{Dist.}{<} zy + z(-x)$$
$$0 \overset{A.2,\ Res.Ant.}{<} yz + (-(xz))$$
$$0 + (x \cdot z) < yz + (-(xz)) + (xz)$$
$$\underline{x \cdot z < yz}$$

v) Seja $(x<y) \wedge (z<0)$

$$z<0 \overset{5.2(ii)}{\Longrightarrow} 0<-z$$

$\therefore$

$$\left.\begin{array}{l} x<y \\ 0<-z \end{array}\right. \overset{(iv)}{\Longrightarrow} x(-z) < y(-z)$$
$$-xz < -yz$$
$$-xz + xz < -yz + xz$$
$$0 < -yz + xz$$
$$0 + yz < -yz + xz + yz$$
$$\boxed{yz < xz}$$