Geometria Analítica - Lista 3

1. Mostre que se $|\vec{u}-\vec{v}| = |\vec{u}+\vec{v}|$ então $\vec{u} \perp \vec{v}$

2. Mostre que se $(\vec{u}-\vec{v}) \perp (\vec{u}+\vec{v})$ então $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

3. Mostre que se $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \vec{0}$ então

$$\vec{u} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$$

e usando essas relações mostre que

$$\frac{|\vec{u}|}{\text{ângulo}(\vec{v},\vec{w})} = \frac{|\vec{v}|}{\text{ângulo}(\vec{w},\vec{u})} = \frac{|\vec{w}|}{\text{ângulo}(\vec{u},\vec{v})}$$

4. Sejam $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ um conjunto de três vetores não coplanares. Definimos os vetores associados

$$\vec{a}^1 := \frac{\vec{a}_2 \times \vec{a}_3}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}$$
$$\vec{a}^2 := \frac{\vec{a}_3 \times \vec{a}_1}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}$$
$$\vec{a}^3 := \frac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}$$

onde $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] := \vec{a}_1 \cdot (\vec{a}_2 \times \vec{a}_3)$ denota o produto misto.
Mostre que

1. $\vec{a}^1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}^2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}^3 \cdot \vec{a}_3 = 1$
   $\vec{a}^1 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}^1 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}^2 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}^2 \cdot \vec{a}_3 = \vec{a}^3 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}^3 \cdot \vec{a}_2 = 0$
2. $[\vec{a}^1, \vec{a}^2, \vec{a}^3] = \frac{1}{[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]}$
3. Dado um vetor $\vec{v}$ ele pode ser expresso como

$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{a}_1)\vec{a}^1 + (\vec{v}\cdot\vec{a}_2)\vec{a}^2 + (\vec{v}\cdot\vec{a}_3)\vec{a}^3$$
$$\vec{v} = (\vec{v}\cdot\vec{a}^1)\vec{a}_1 + (\vec{v}\cdot\vec{a}^2)\vec{a}_2 + (\vec{v}\cdot\vec{a}^3)\vec{a}_3$$

5. Mostre que dado um vetor $\vec{v}$ ele satisfaz

$$\widehat{i} \times (\vec{v} \times \widehat{i}) + \widehat{j} \times (\vec{v} \times j) + \widehat{k} \times (\vec{v} \times \widehat{k}) = 2\vec{v}$$

6. Seja $\vec{a} = \widehat{i} - \widehat{j} + \widehat{k}$, $\vec{b} = 2\widehat{i} + 3\widehat{j} + \widehat{k}$ e $\lambda = 1$. Determine um vetor $\vec{v}$ solução das equações

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = \lambda, \qquad \vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}$$

7. Considerando que $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ encontre o vetor $\vec{v}$ que resolve as equações

$$\vec{a}\cdot\vec{v} = \lambda, \qquad \vec{a} \times \vec{v} = \vec{b}$$

8. Mostre que qualquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ tem-se

$$(\vec{u} \pm \vec{v}) \cdot [(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})] = 0$$

9. Mostre que qualquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ tem-se

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot [(\vec{u} \times \vec{w}) \times (\vec{u} + \vec{v})] = 0$$

10. Considere um tetraedro cujas faces são triângulos equiláteros de lado a. Usando vetores, encontre o ângulo que cada lado forma com os lados das outras faces e também a distância de cada vértice à face oposta.