Lista 1

1. Seja $A = (a_{ij})$ a matriz quadrada de ordem 2 definida por

$$a_{ij} = \begin{cases} 2^{i+j} & \text{se } i < j \\ i^2 + 1 & \text{se } i \geq j \end{cases}$$

   Escreva explicitamente a matriz A.

2. Seja $A = (a_{ij})$ a matriz 2×3 onde

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - j & \text{se } i \neq j \\ i + j & \text{se } i = j \end{cases}$$

   Escreva explicitamente a matriz A.

3. Dê um exemplo de três matrizes 2×2, A, B, C tal que A não é a matriz nula e se tenha $AB = AC$ com $B \neq C$.

4. Seja a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   i. Determine $A^3 = AAA$

   ii. Se A^n denota o produto de A por A tomado n vezes, determine o valor do número natural k tal que $A^{k^2} - A^{5k} + A^6 = I$ onde I é a matriz identidade.

5. Determine a matriz H tal que $HA = B$ onde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Sejam A, B, C matrizes quadradas. Defina um novo produto $\star$ dado por $A \star B := AB - BA$.

   i. Mostre que $\star$ não é associativa, isto é, $A \star (B \star C) \neq (A \star B) \star C$.

   ii. Mostre que se tem $A \star (B \star C) + B \star (C \star A) + C \star (A \star B) = 0$

7. Mostre que não existem matrizes quadradas A e B que verifiquem $AB - BA = I$ onde I é a matriz identidade de ordem n.

8. Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i. Encontre todas as matrizes $B_{2\times 2}$ que comutam com A
ii. Mostre que $A^2 = 2A - I$, onde I é a matriz identidade de ordem 2×2.
iii. Encontre a fórmula para A^n em função de A e I e calcule A^{100}.

9. Determine todas as matrizes reais X de ordem 2×2 tais que

$$X^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

10. Determine todas as matrizes reais X de ordem 2×2 tais que se tem $AX = XA$

11. Sejam A e B matrizes $n \times n$. Mostre que
i. $(AB)^t = B^t A^t$
ii. $A + A^t$ é simétrica
iii. AA^t é uma matriz simétrica
iv. $A - A^t$ é antissimétrica
v. $(A^2)^t = (A^t)^2$
vi. $(A^3)^t = (A^t)^3$

12. Seja $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$. Mostre que se a terceira linha da matriz A é quatro vezes a primeira linha de A, então a terceira linha de AB também é igual a quatro vezes a primeira linha de AB.