Geometria Analítica - Lista 2

1. Calcule os determinantes usando a regra de Sarrus:

   (a)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\det\begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 6 & 8 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Calcule os determinantes fazendo uma expansão por cofatores:

   (a)

$$\det\begin{pmatrix} -4 & 2 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 7 & 2 & -3 & 2 \\ 4 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -3 \\ -9 & -5 & 7 & -8 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

3. Sem calcular os determinantes, explique porque os dois determinantes são iguais.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. Sem calcular os determinantes, explique porque eles são zero.

   (a)

$$\det\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

   (b)

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

5. Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem 6. Determine o sinal dos termos $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ e $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ no desenvolvimento do determinante de A.

6. Escreva a soma dos determinantes como um único determinate

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Calcular o determinante usando apenas as propriedades do determinante

$$\det\begin{pmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{pmatrix}$$

Res.: 0

8. Mostrar que

$$\det\begin{pmatrix} b+c & a-b & a \\ c+a & b-c & b \\ a+b & c-a & c \end{pmatrix} = 3abc - a^3 - b^3 - c^3$$

9. Os números 20604, 53227, 25755, 20927, 78421 são divisíveis por 17. Mostrar usando as propriedades do determinante que o determinante

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

também é divisível por 17.

10. Usando apenas propriedades do determinante mostrar que

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix} = 0$$

se verificada a condição $a + b + c + d = 0$, mencionando que propriedades foram utilizadas.

11. Usando apenas propriedades do determinante mostre que

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix} = 0$$

12. Verifique e justifique que é nulo o determinante

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & 2a+d \\ 1 & b & 2b+d \\ 1 & c & 2c+d \end{pmatrix}$$

13. Mostre que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 & a_1 a_2 \\ 1 & b_1 + b_2 & b_1 b_2 \\ 1 & c_1 + c_2 & c_1 c_2 \end{pmatrix} = 0$$

se for satisfeita a condição $a_1 a_2 = b_1 b_2 = c_1 c_2$.

14. Mostre que

$$2 \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

15. Calcule

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{pmatrix}$$

Res.: a^4

16. Calcular o valor do determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

Resp.: $a_2 \dots a_n$

17. Calcular o valor do determinante

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

Res.: $a_1 a_2 \dots a_n$

18. Calcular o valor do determinante

$$\det \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{pmatrix}$$

Resp.: $a_1 a_2 \dots a_n \left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots \frac{1}{a_n}\right)$

19. Calcular o valor do determinante de ordem $n \times n$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Resp.: 1

20. Mostrar que o determinante de ordem $n \times n$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

é nulo ou 1 conforme n seja ímpar ou par.