Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

5ª lista de exercícios (03/04/2017 a 07/04/2017)

1. Em cada item, encontre o mínimo múltiplo comum das expressões:

(a) $a^3b^2c\,;\;\; a^2b^3d\,;\;\; a^2b^4f$;

(b) $108x^2y^3z\,;\;\; 72x^3y$;

(c) $8a^2b\,;\;\; 10b^2c\,;\;\; 12ac^2$;

(d) $2x(x+y)^2\,;\;\; 4x^2(x+y)(x-y)\,;\;\; 6y(x+y)(x^2-xy+y^2)$;

(e) $x^2-y^2\,;\;\; y^2-x^2\,;\;\; x^2+2xy+y^2\,;\;\; x-y$;

(f) $2x^2+2xy\,;\;\; x^3+2x^2y+xy^2\,;\;\; 3x^3-3xy^2$.

2. Em cada item, reescreva as frações com o menor denominador comum:

(a) $\dfrac{3b}{2a^2}\,;\;\; \dfrac{2a}{3b^2}\,;\;\; \dfrac{3}{4ab}$;

(b) $\dfrac{a-b}{(a+b)^2}\,;\;\; \dfrac{b+c}{a^2-b^2}\,;\;\; \dfrac{a-b}{(a+b)(b+c)}$;

(c) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}\,;\;\; \dfrac{a-b}{a^2+ab}\,;\;\; \dfrac{a+b}{ab-b^2}$.

3. Simplifique as frações:

(a) $\dfrac{2x(a-b)}{4xy(a+b)}$;

(b) $\dfrac{x^2-xy}{xy-y^2}$;

(c) $\dfrac{4x^2-6x}{4x^2-9}$;

(d) $\dfrac{x^2-3x-10}{x^2+4x+4}$;

(e) $\dfrac{x^3+y^3}{x^3-x^2y+xy^2}$;

(f) $\dfrac{5x^{n-1}y^n}{15x^ny^{n-2}}$;

(g) $\dfrac{2a^2b(a-b)^2}{6a^2(a^2-b^2)}$;

(h) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+2xy+y^2}$.

4. Efetue as multiplicações e, se possível, simplifique o resultado:

(a) $\dfrac{3x-2}{5x+3}\cdot\dfrac{4x-1}{3x+2}$;

(b) $\dfrac{(x-y)^2}{x+y}\cdot\dfrac{(x+y)^2}{x^2-y^2}$;

(c) $\dfrac{9x^2-1}{2x+4}\cdot\dfrac{6x+12}{15x+5}$;

(d) $\dfrac{2x^3-6x^2+4x}{3x^2-3}\cdot\dfrac{6x^2-6x-12}{12x^2+24x}$;

(e) $\dfrac{x^2-4}{x^2-3x}\cdot\dfrac{x^3-9x}{x^2-4x+4}$.

5. Efetue as divisões e, se possível, simplifique o resultado:

(a) $\dfrac{\frac{2x}{3y}}{\frac{3y^2}{4x^3}}$;

(b) $\dfrac{\frac{x^3-4x}{x^3-27}}{\frac{2x^2-2x-12}{2x^2-12x+18}}$.

6. Escreva as expressões abaixo na forma de uma única fração, seguindo o exemplo do item (a):

(a) $\dfrac{x+1}{x-1} - \dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{(x+1)^2-1}{x^2-1} = \dfrac{x^2+2x}{x^2-1}$;

(b) $-\dfrac{4xy}{x^2-y^2} - \dfrac{x-y}{x+y} - \dfrac{x+y}{x-y}$;

(c) $\dfrac{x+2}{x^2+x} - \dfrac{x+1}{x^2+2x+1} - \dfrac{1}{x}$;

(d) $\dfrac{a-3}{a+4} - \dfrac{a-5}{3-a} - \dfrac{a^2-9a-3}{a^2+a-12}$;

(e) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)} + \dfrac{b}{(b-a)(b-c)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$;

(f) $\dfrac{2x-1}{3x} + \dfrac{1-2x}{2x} - \dfrac{x-1}{4x}$;

(g) $\dfrac{x+3}{2x} - \dfrac{9x^2-4x^3}{6x^2} - \dfrac{2x-3}{3}$;

(h) $2x - \dfrac{8x}{x+2}$;

(i) $x + \dfrac{xy}{x-y}$;

(j) $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x+2}{x-2}$;

(k) $\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1+x} + \dfrac{3}{1-x^2}$.

7. Simplifique as expressões abaixo sob a forma de uma única fração:

(a) $\left(\dfrac{3}{1-2x} - \dfrac{7}{1+2x} - \dfrac{5-22x}{4x^2-1}\right) \cdot \left(\dfrac{x-2}{x+2} + \dfrac{5}{2x+4}\right)$;

(b) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}\left(\dfrac{2a-b}{a+b} - \dfrac{a-b}{a}\right)}{\dfrac{a-b}{a+b} - \dfrac{a+b}{a} + \dfrac{a^2+2ab+b^2}{a^2+ab}}$;

(c) $\left(\dfrac{x^2\left(\dfrac{1+x}{1-x} - \dfrac{1-x}{1+x}\right)}{\left(\dfrac{1+x}{1-x} - 1\right)\left(1 - \dfrac{1}{1+x}\right)} - 2\right) \cdot (x+1)$.

8. Efetue as divisões de polinômios (encontrando quociente e resto) e escreva as duas identidades associadas à divisão, conforme exemplo no item (a):

(a) $(2x^2-5x+7) \div (x-4)$;
Quociente: $2x+3$; Resto: 19.
$2x^2-5x+7 = (x-4)(2x+3)+19$;
$\dfrac{2x^2-5x+7}{x-4} = 2x+3+\dfrac{19}{x-4}$.

(b) $(x^3-x^2+x+1) \div (x-1)$;

(c) $(x^3-x^2+x+1) \div (x^2-1)$;

(d) $(x^3-9x^2+26x-24) \div (x^2-5x+6)$;

(e) $(x^5-3x^4-2x^3+4x^2-3) \div (x^4-x^2-1)$;

(f) $(x^3-3) \div (x^4+5x+7)$;

(g) $(-3x^2-14x+17) \div (x^2-3)$;

(h) $(x^3-3x+7) \div (2x-4)$;

(i) $(x^6-1) \div (x-1)$;

(j) $(25x^6-30x^3) \div (5x^2)$.

9. Existe uma forma "prática" para calcular a divisão entre polinômios no caso em que o divisor é da forma $x-a$, em que a é um número. Este processo se chama *Algoritmo de Briot-Ruffini* (ou *Dispositivo de Briot-Ruffini*). Pesquise sobre esse processo e utilize-o para efetuar as divisões abaixo:

(a) $(x^3 - x + 3) \div (x - 2)$;

(b) $(x^2 - 3x + 2) \div (x - 1)$;

(c) $(x^5 + x^2 + 1) \div (x + 3)$.

10. Descobrir os divisores de um dado polinômio não é uma tarefa fácil. Existe um teorema que diz quando que um dado polinômio é ou não divisível por $x - a$ (e este teorema só vale quando o divisor é dessa forma). O teorema diz que um dado polinômio é divisível por $x - a$ exatamente quando o polinômio dado se anula ao substituir a letra x pelo número a. Por exemplo, o polinômio $x^2 - 5x + 6$ é divisível por $x - 3$ pois se trocarmos o x por 3, obtemos $3^2 - 5 \cdot 3 + 6 = 0$. Por outro lado, $x^2 - 5x + 6$ não é divisível por $x - 1$, pois $1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 2 \neq 0$. Utilize esse raciocínio para, sem fazer a divisão, dizer se as divisões abaixo são ou não exatas:

(a) $(x^2 - 4x + 4) \div (x - 1)$;

(b) $(x^2 - 4x + 4) \div (x - 2)$;

(c) $(x^2 - 4x + 4) \div x$;

(d) $(x^2 - 4x + 4) \div (x + 1)$;

(e) $(x^3 - 5x + 7) \div (x - 1)$;

(f) $(x^2 - 9) \div (x - 3)$;

(g) $(x^2 - 9) \div (x + 3)$;

(h) $(x^2 - 9) \div (x + 7)$.

11. A ideia da questão anterior pode nos ajudar a procurar os divisores de um polinômio (e, consequentemente, encontrar sua fatoração). Por exemplo, imaginemos que nosso objetivo seja fatorar o polinômio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$. Como já dissemos, encontrar seus divisores não é uma tarefa fácil. O teorema da questão anterior diz que descobriremos um divisor da forma $x - a$ quando encontrarmos algum número a que substituído no polinômio $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ resulte no valor 0. Ainda assim, encontrar números que fazem o resultado da expressão $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ ser 0 continua não sendo uma tarefa fácil. Novamente, recorreremos a um teorema: se algum número em $\mathbb{Z}$ anula a expressão $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$, então esse número é um divisor do termo independente do polinômio (nesse caso, divisor de -24). Os divisores inteiros de -24 são: 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, 8, -8, 12, -12, 24 e -24. Neste caso, testaremos "apenas" essas possibilidades. Substituindo diretamente (ou usando Briot-Ruffini), verificamos que $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ dá resultado 0 quando x é substituído por 2. Com isso, descobrimos que $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ é divisível por $x - 2$. Efetuando a divisão, chegamos a $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x^2 - 7x + 12)$. Ainda podemos nos perguntar se $x^2 - 7x + 12$ também pode ser fatorado. Como agora o polinômio tem grau 2, temos o recurso da fórmula de Bhaskara. Por Bhaskara, concluímos que 3 e 4 são números que fazem $x^2 - 7x + 12$ ser 0. Isso diz que $x^2 - 7x + 12$ é divisível por $x - 3$ e por $x - 4$. De fato, é fácil verificar que $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$. Voltando à igualdade $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x^2 - 7x + 12)$, podemos substituir a fatoração de $x^2 - 7x + 12$ para concluir que $x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$. E isso finaliza nossa fatoração. Aplique esse racionínio para fatorar os polinômios abaixo:

(a) $x^3 + 3x^2 - 13x - 15$;

(b) $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$.

Observação. O procedimento acima nem sempre funciona, pois os números que anulam um polinômio (esses números são chamados *raízes* do polinômio) podem não ser números inteiros. Nesses casos, o procedimento acima não conduzirá às raízes e nem à fatoração. Para polinômios de grau 2, a fórmula de Bhaskara é responsável por encontrar as raízes (nessa fórmula, não é necessário ficar "chutando" valores). Existem fórmulas similares à de Bhaskara para polinômios de graus 3 e 4, chamada de fórmulas de Cardano (ou Tartaglia-Cardano). Para polinômios de grau maior que 4, foi provado que **não existe** fórmula para determinar as raízes.

12. Utilize as respostas da questão anterior para simplificar as frações:

(a) $\dfrac{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}{x + 5}$;

(b) $\dfrac{x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6}{x^3 + 3x^2 - 13x - 15}$.

13. Analise o sinal dos polinômios de primeiro grau abaixo, seguindo o modelo do item (a):

(a) $2x - 4$;
• Se $x > 2$, então $2x - 4 > 0$ (isto é, $2x - 4$ é um número positivo quando x é um número maior que 2).
• Se $x = 2$, então $2x - 4 = 0$.
• Se $x < 2$, então $2x - 4 < 0$ (isto é, $2x - 4$ é um número negativo quando x é um número menor que 2).

(b) $3x + 6$;

(c) $-x + 4$;

(d) $2x + 3$;

(e) $2x - 3$;

(f) $6 - 3x$;

(g) $\dfrac{3}{5}x - \dfrac{2}{7}$.

14. Analise o sinal dos polinômios de segundo grau abaixo, seguindo o modelo do item (a):

(a) $x^2 - 5x + 6$;
• Se $x \in (2, 3)$, então $x^2 - 5x + 6 > 0$ (isto é, $x^2 - 5x + 6$ é um número positivo quando x é um número maior que 2 e menor que 3).
• Se $x = 2$ ou $x = 3$, então $x^2 - 5x + 6 = 0$.
• Se $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$, então $x^2 - 5x + 6 < 0$ (isto é, $x^2 - 5x + 6$ é um número negativo quando x é um número menor que 2 ou é um número maior que 3).

(b) $x^2 - 6x + 5$;

(c) $x^2 - 4$;

(d) $x^2 + 5x + 6$;

(e) $-x^2 + 6x - 5$;

(f) $-x^2 - 5x + 14$;

(g) $x^2 - x$;

(h) $x^2 - 2x + 1$;

(i) $x^2 - 3$;

(j) x^2;

(k) $2x^2 - 5x + 2$;

(l) $x^2 + x + 3$;

(m) $-x^2 + x - 3$.

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

A. Z. Aranha e M. B. Rodrigues – *Exercícios de Matemática - vol. 1, Revisão de 1º grau.* Segunda edição, Editora Policarpo, São Paulo, 1998.