Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

6ª lista de exercícios (17/04/2017 a 21/04/2017)

1. Em cada item, verifique se o valor fornecido é uma solução da equação $4x + 7 = 9x - 3$:

(a) $x = -2$; **(b)** $x = 2$; **(c)** $x = 0$; **(d)** $x = \sqrt{2}$; **(e)** $x = \pi$; **(f)** $x = 2^{50}$.

2. Em cada item, verifique se o valor fornecido é uma solução da equação $1-(2-(3-x)) = 4x-(6+x)$:

(a) $x = 2$; **(b)** $x = 4$; **(c)** $x = -1$.

3. Em cada item, verifique se o valor fornecido é uma solução da equação $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-4} = 1$:

(a) $x = 2$; **(b)** $x = 4$; **(c)** $x = 0$; **(d)** $x = -5$.

4. Em cada item, verifique se o valor fornecido é uma solução da equação $\dfrac{x^{3/2}}{x-6} = x - 8$:

(a) $x = 4$; **(b)** $x = 8$; **(c)** $x = 3$; **(d)** $x = -1$.

5. Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede, conforme exemplo no item (a):

(a) Soluções reais da equação $x^3 - 3x + 7 = 4$;
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x + 7 = 4\}$.

(b) Soluções naturais da equação $x^5 + \sqrt{x} = 3x^2$;

(c) Soluções racionais da equação $x^2 + x^4 = -x$;

(d) Soluções reais da equação $2x - 3 = 0$;

(e) Soluções racionais da equação $2x - 3 = 0$;

(f) Soluções inteiras da equação $2x - 3 = 0$;

(g) Soluções irracionais da equação $x^3 - 2x = 0$.

6. Explicite os conjuntos soluções dos itens (d), (e) e (f) do exercício anterior. Como seria o enunciado dos exercícios que teriam essas respostas?

7. Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede, conforme exemplo no item (a):

(a) Soluções em $\mathbb{R}^2$ de $x - y = 0$;
$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$.

(b) Soluções em $\mathbb{R}^2$ de $y = x^2$;

(c) Soluções em $\mathbb{R}^2$ de $y = x^2 + 1$;

(d) Soluções em $\mathbb{R}^2$ de $x^2 + y^2 = 1$.

8. Desenhe, no plano cartesiano, os conjuntos soluções do exercício anterior.

9. Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede.

(a) Soluções em $\mathbb{R}^3$ de $x + y + z = 1$;

(b) Soluções em $\mathbb{R}^3$ de $x + y = 1$.

10. Utilize seus conhecimentos de Geometria Analítica para desenhar os conjuntos soluções do exercício anterior.

11. Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede:

(a) Soluções reais do sistema de equações $\begin{cases} 2x^2 - 1 &= x \\ 2x + 4 &= 0; \end{cases}$

(b) Soluções reais do sistema de equações $\begin{cases} 2x^3 + 3x - 9 &= \sqrt{2}x \\ |3x^2 - 2x| + \sqrt[3]{x^2 - 1} &= |x| \\ x^x &= \sqrt{7}; \end{cases}$

(c) Soluções reais do sistema de equações $\begin{cases} 3x - 6 &= 3 \\ 4x - 2 &= 2 \\ x - 3 &= 0; \end{cases}$

(d) Soluções em $\mathbb{R}^2$ do sistema de equações $\begin{cases} 2x - 3y &= 1 \\ 4x + 2y &= 10. \end{cases}$

12. Explicite os conjuntos soluções dos itens (c), (d) do exercício anterior.

13. Nas fórmulas abaixo, resolva para a variável indicada:

(a) $PV = nRT$ para R;

(b) $F = G\dfrac{mM}{r^2}$ para m;

(c) $P = 2l + 2w$ para w;

(d) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$ para R_1;

(e) $\dfrac{ax + b}{cx + d} = 2$ para x;

(f) $a - 2(b - 3(c - x)) = 6$ para x;

(g) $a^2x + (a - 1) = (a + 1)x$ para x;

(h) $\dfrac{a + 1}{b} = \dfrac{a - 1}{b} + \dfrac{b + 1}{a}$ para a;

(i) $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$ para r;

(j) $F = G\dfrac{mM}{r^2}$ para r;

(k) $a^2 + b^2 = c^2$ para b;

(l) $A = P\left(1 + \dfrac{i}{100}\right)^2$ para i.

14. Em cada uma das equações abaixo, determine o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ sobre o qual a equação faz sentido, conforme exemplos (a), (b) e (c):

(a) $\sqrt{x} = x^2 - 1$;

$x \in [0, \infty)$;

(b) $\dfrac{x}{x - 1} = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$;

$x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty)$;

(c) $\dfrac{x+3}{7} = x^2 - x + 18$;

$x \in \mathbb{R}$;

(d) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{2x-3}{2x-4} = \dfrac{1}{x^2-1}$;

(e) $\sqrt{x} - \dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{2x-3}{2x-4} = \dfrac{1}{x^2-1}$;

(f) $\dfrac{x}{x} = x^2 - 3$;

(g) $\dfrac{x^2}{x^2+1} = x^2 + x^4$;

(h) $x^{5/2} - x^3 = 7$;

(i) $\dfrac{\sqrt{-x}}{x+1} = \dfrac{1}{x-3}$;

(j) $\sqrt{-x} + \sqrt{x} = x^3$;

(k) $|x^2 - 1| + \sqrt{|3x-4|} - \sqrt{x-3} = \dfrac{1}{\sqrt{7-x}}$.

15. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) Adicionar o mesmo número a cada lado de uma equação sempre conduz a uma equação equivalente.

(b) Multiplicar cada lado de uma equação por um mesmo número sempre conduz a uma equação equivalente.

(c) Elevar ao quadrado ambos os lados de uma equação sempre conduz a uma equação equivalente.

(d) Elevar ao cubo ambos os lados de uma equação sempre conduz a uma equação equivalente.

(e) Assumindo que ambos os lados de uma equação são números não negativos, extrair a raiz quadrada de ambos os lados da equação sempre conduz a uma equação equivalente.

(f) Extrair a raiz cúbica em ambos os lados de uma equação sempre conduz a uma equação equivalente.

(g) Aplicar módulo a ambos os lados de uma equação sempre conduz a uma equação equivalente.

16. Em cada item, diga se a passagem efetuada é uma implicação ou uma equivalência (considerando $\mathbb{R}$ como universo de solução), conforme exemplos nos itens (a) e (b):

(a) De $2x - 4 = 0$ para $2x = 4$;

É uma equivalência, pois é possível obter qualquer uma das equações a partir da outra. Neste caso, usamos a notação

$$2x - 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = 4.$$

(b) De $2x = 4$ para $4x^2 = 16$;

É uma implicação (da esquerda para a direita), pois a equação $2x = 4$ ser verdadeira obriga que $4x^2 = 16$ também seja verdadeira, mas o oposto não ocorre. Por exemplo, a equação $4x^2 = 16$ possui $x = -2$ como solução, que não é solução de $2x = 4$. Neste caso, usamos a notação

$$2x = 4 \quad \Longrightarrow \quad 4x^2 = 16.$$

Observação. Note que essas equações não são equivalentes no universo $\mathbb{R}$, mas seriam equivalentes, por exemplo, em $\mathbb{R}_+$.

(c) De $\sqrt{x^2} = 4$ para $x = 4$;

(d) De $\dfrac{3x-3}{x-1} = x + 2$ para $3 = x + 2$;

(e) De $\dfrac{3x-3}{x-1} = x + 2$ para $3 = x + 2$ e $x \neq 1$;

(f) De $\sqrt[3]{x-3} = x^2 - 6x + 7$ para $x - 3 = x^2 - 6x + 7$;

(g) De $x^2 - 3 = \dfrac{x+1}{x-1}$ para $|x^2 - 3| = \left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$;

(h) De $|x^3 - x + 4| = |x^2 - 6|$ para $x^3 - x + 4 = x^2 - 6$;

(i) De $|2x - 6| = 7$ para $2x - 6 = 7$ ou $2x - 6 = -7$.

17. Resolva as equações abaixo (todas são equivalentes a uma equação de primeiro grau):

(a) $2x + 7 = 31$;

(b) $5x - 3 = 4$;

(c) $\dfrac{1}{2}x - 8 = 1$;

(d) $3 + \dfrac{1}{3}x = 5$;

(e) $-7w = 15 - 2w$;

(f) $5t - 13 = 12 - 5t$;

(g) $\dfrac{1}{2}y - 2 = \dfrac{1}{3}y$;

(h) $\dfrac{z}{5} = \dfrac{3}{10}z + 7$;

(i) $2(1 - x) = 3(1 + 2x) + 5$;

(j) $\dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{2}(y - 3) = \dfrac{y+1}{4}$;

(k) $2x - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x+1}{4} = 6x$;

(l) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{3x} + 1$;

(m) $\dfrac{2x-1}{x+2} = \dfrac{4}{5}$;

(n) $\dfrac{3}{x+1} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3x+3}$;

(o) $\dfrac{4}{x-1} + \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{35}{x^2-1}$;

(p) $(t - 4)^2 = (t + 4)^2 + 32$;

(q) $\sqrt{3}x + \sqrt{12} = \dfrac{x+5}{\sqrt{3}}$;

(r) $\dfrac{3x-3}{x-1} = x + 2$;

(s) $2x - 3(x - 4) = -x + 6$;

(t) $2x - 3(x - 4) = -x + 12$;

(u) $\dfrac{(x+2)(x-1)}{x-1} = x + 2$.

18. Resolva as equações abaixo utilizando propriedades de fatoração (todas são equivalentes a uma equação de segundo grau):

(a) $x^2 + x - 12 = 0$;

(b) $x^2 + 3x - 4 = 0$;

(c) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

(d) $x^2 + 8x + 12 = 0$;

(e) $4x^2 - 4x - 15 = 0$;

(f) $2y^2 + 7y + 3 = 0$;

(g) $3x^2 + 5x = 2$;

(h) $6x(x - 1) = 21 - x$;

(i) $2x^2 = 8$;

(j) $3x^2 - 27 = 0$.

19. Resolva as equações abaixo completando o quadrado (todas são equivalentes a uma equação de segundo grau):

(a) $(x + 2)^2 = 4$;

(b) $(3x + 2)^2 = 10$;

(c) $(2x - 1)^2 = 8$;

(d) $x^2 + 2x - 5 = 0$;

(e) $x^2 - 4x + 2 = 0$;

(f) $x^2 - 6x - 11 = 0$;

(g) $x^2 + 3x - \dfrac{7}{4} = 0$;

(h) $2x^2 + 8x + 1 = 0$;

(i) $3x^2 - 6x - 1 = 0$;

(j) $4x^2 - x = 0$;

(k) $x^2 = \dfrac{3}{4}x - \dfrac{1}{8}$.

20. Resolva as equações abaixo utilizando a fórmula de Bhaskara (todas são equivalentes a uma equação de segundo grau):

(a) $x^2 - 2x - 15 = 0$;

(b) $x^2 + 5x - 6 = 0$;

(c) $x^2 - 7x + 10 = 0$;

(d) $x^2 + 30x + 200 = 0$;

(e) $2x^2 + x - 3 = 0$;

(f) $3x^2 + 7x + 4 = 0$;

(g) $3x^2 + 6x - 5 = 0$;

(h) $x^2 - 6x + 1 = 0$;

(i) $z^2 - \dfrac{3}{2}z + \dfrac{9}{16} = 0$;

(j) $2y^2 - y - \dfrac{1}{2} = 0$;

(k) $4x^2 + 16x = 9$;

(l) $0 = x^2 - 4x + 1$;

(m) $w^2 = 3(w - 1)$;

(n) $3 + 5z + z^2 = 0$;

(o) $10y^2 - 16y + 5 = 0$;

(p) $25x^2 + 70x + 49 = 0$.

21. Apenas analisando o discriminante, diga quantas soluções (reais) cada equação abaixo possui:

(a) $x^2 - 6x + 1 = 0$;

(b) $3x^2 = 6x - 9$;

(c) $x^2 + 2,2x + 1,21 = 0$;

(d) $x^2 + 2,21x + 1,21 = 0$;

(e) $4x^2 + 5x + \dfrac{13}{8} = 0$;

(f) $x^2 + rx - s = 0$, sabendo que $s > 0$.

22. Resolva as equações abaixo:

(a) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{5}{4}$;

(b) $\dfrac{10}{x} - \dfrac{12}{x-3} + 4 = 0$;

(c) $\dfrac{x^2}{x+100} = 50$;

(d) $\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2}{x^2} = 0$;

(e) $\dfrac{x+5}{x-2} = \dfrac{5}{x+2} + \dfrac{28}{x^2-4}$;

(f) $\dfrac{x}{2x+7} - \dfrac{x+1}{x+3} = 1$.

23. Determine os valores de m para os quais a equação

$$mx^2 + (m+1)x + (m+1)$$

possui uma única raiz real.

24. Sejam r_1 e r_2 as soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$. É possível demonstrar que

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 + bx + c$$

(você consegue demonstrar??). Usando esse resultado, caracterize $S = r_1 + r_2$ e $P = r_1 r_2$ em termos de a, b e c.

25. Obtenha um resultado análogo ao exercício anterior para a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ com raízes r_1, r_2 e r_3. Você consegue generalizar esse resultado para polinômios quaisquer? Essas relações são conhecidas como *relações de Girard*.

26. As raízes da equação $2x^2 - 2mx + 3 = 0$ são positivas e uma é o triplo da outra. Determine m.

27. Obtenha uma equação de segundo grau cujas raízes são:

(a) 2 e -3;

(b) $\dfrac{1}{2}$ e $-\dfrac{3}{2}$;

(c) $0,4$ e 5;

(d) 1 e $-\sqrt{2}$;

(e) $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$.

28. Resolva a equação $ax^2 + bx + c = 0$ pelo método do completamento do quadrado e, a partir disso, deduza a fórmula de Bhaskara.

29. O exercício acima sugere que as fórmulas matemáticas são obtidas quando resolvemos um problema (que aparece muitas vezes) em sua forma genérica (isto é, trocando os números por letras). Nesse exercício, construiremos nossa própria fórmula. Imagine que nosso objetivo seja resolver as equações $\dfrac{1}{x-4} = 7$, $\dfrac{3}{x+1} = 10$ e $\dfrac{-3}{x+3} = -3$. Note todas elas são parecidas, mudando apenas alguns números. Em vez de resolver todas elas, uma a uma, resolva a forma geral $\dfrac{a}{x+b} = c$ e encontre uma "fórmula" para x. Após isso, substitua os valores de a, b e c de cada equação na fórmula obtida para encontrar as soluções.

30. Se F é a distância focal de uma lente convexa e um objeto é colocado a uma distância x da lente, então sua imagem estará a uma distância y da lente, em que F, x e y estão relacionados pela equação

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Suponha que a distância focal da lente seja $4,8\,cm$ e que a imagem de um objeto está $4\,cm$ mais próxima da lente do que o próprio objeto. Qual é a distância do objeto à lente?

31. A população de peixes em um certo lago é dada pela fórmula

$$F = 1000(30 + 17t - t^2),$$

em que F é o número de peixes e t é o número de anos a partir de 01/01/2002.

(a) Em qual data a população de peixes será a mesma de 01/01/2002?

(b) A partir de que data todos os peixes do lago estarão mortos?

32. Um empresário encontrou uma fórmula para calcular seu lucro ao vender x unidades do seu produto. A fórmula é dada por $P = \dfrac{1}{10}x(300 - x)$, em que P representa o lucro; a fórmula só é válida para $0 \leq x \leq 200$. Qual deve ser a quantidade de unidades vendidas para que o lucro seja R\$ 1.250,00?

33. Uma companhia de aluguel de carros cobra R\$ 30,00 por dia alugado e mais R\$0,15 para cada quilômetro percorrido. Eliane alugou um carro por dois dias e sua conta foi R\$108,00. Quantos quilômetros Eliane percorreu?

34. Maria recebeu uma herança de R\$100.000,00 e investiu em duas aplicações. Uma das aplicações rende 6% e a outra 4,5% de juros ao ano. Se, após um ano, Maria teve um rendimento de R\$5.025,00 de juros, qual foi a quantia investida em cada aplicação?

35. A diferenças entre as dimensões de um terreno retangular é $8\,m$. Sabendo que a área é $2900\,m^2$, determine as dimensões do terreno.

36. Uma pessoa com $1,8\,m$ de altura deseja encontrar a altura de um edifício. Ele mediu o comprimento de sua sombra e da sombra do edifício ao mesmo tempo e obteve $1,05\,m$ e $8,4\,m$, respectivamente. Qual é a altura do prédio?

37. Um fabricante de refrigerantes diz na embalagem de seu refrigerante de laranja que 5% do volume do produto é de suco natural de laranja. Porém, uma nova regulamentação federal indicou que todos os refrigerantes desse tipo devem contem, no mínimo, 10% de suco. Qual é a quantidade se suco natural que deve ser adicionada a $900\,ml$ de refrigerante para que este passe a ter 10% de suco?

38. Uma mulher ganha 15% a mais que seu companheiro. Sabendo que os dois juntos ganham R\$ 69.875,00 por ano, qual é o salário anual da mulher?

39. Dois barcos de pesca partem ao mesmo tempo do mesmo local. Um deles viaja no sentido sul e o outro no sentido leste. O barco rumo ao leste possui velocidade $3\,km/h$ mais rápido que o outro barco. Sabe-se que após duas horas, a distância entre os barcos é de $30\,km$. Determine a velocidade dos dois barcos.

40. Um bambu de $5\,m$ de comprimento é fixado ao solo na vertical e quebrado em uma dada altura de modo que a parte superior cai até tocar o solo formando um triângulo com o solo (os lados do triângulo são os dois pedaços do bambu e o solo). Sabendo que a distância no solo entre as duas partes é de $1,5\,m$, qual é o comprimento de cada parte?

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.