Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Departamento de Matemática

MTM3100 - Pré-cálculo

8ª lista de exercícios (01/05/2017 a 05/05/2017)

1. Em cada um dos itens abaixo, verifique quais elementos do conjunto $A = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\right\}$ são soluções das inequações:

(a) $3 - 2x \leq \frac{1}{2}$; **(b)** $2x - 1 \geq x$; **(c)** $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{2}$;

(d) $x^2 + 2 \leq 4$; **(e)** $x^4 - x^2 + 3 > 2x^3 - 1$; **(f)** $\sqrt{|x|} \leq 3$.

2. Em cada um dos itens abaixo, verifique quais elementos do conjunto $A = \left\{-2, -1, 0, \frac{1}{2}, 1, \sqrt{2}, 2, 4\right\}$ são soluções das inequações simultâneas:

(a) $1 < 2x - 4 \leq 7$; **(b)** $-2 \leq 3 - x < 2$; **(c)** $3 \leq x^2 - 1 \leq 5$.

3. Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede, conforme exemplo no item (a):

(a) Soluções reais da inequação $x^3 - 3x + 7 > 4$;
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3 - 3x + 7 > 4\}$.

(b) Soluções naturais da inequação $x^5 + \sqrt{x} \leq 3x^2$;

(c) Soluções reais da inequação $2x - 4 > 0$;

(d) Soluções naturais da inequação $2x - 4 > 0$;

(e) Soluções inteiras da inequação $2x - 4 > 0$.

4. Explicite os conjuntos soluções dos itens (c), (d) e (e) do exercício anterior.

5. Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede, conforme exemplo no item (a):

(a) Soluções em $\mathbb{R}^2$ de $x - y > 0$;
$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\}$.

(b) Soluções em $\mathbb{R}^2$ de $x - y \geq 0$;

(c) Soluções em $\mathbb{R}^2$ de $x - y \leq 0$.

6. Desenhe, no plano cartesiano, os conjuntos soluções do exercício anterior.

7. Em cada item, escreva (sem resolver) o conjunto solução associado ao que se pede:

(a) Soluções reais do sistema de inequações $\begin{cases} 2x^2 - 1 & > & x \\ 2x + 4 & < & 0; \end{cases}$

(b) Soluções reais do sistema de inequações $\begin{cases} 3x - 6 & > & 3 \\ 3x - 6 & < & 10; \end{cases}$

8. Explicite o conjunto solução do item (b) do exercício anterior.

9. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) Se uma desigualdade é verdadeira, então adicionar o mesmo número a ambos os lados da desigualdade sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(b) Se uma desigualdade é verdadeira, então multiplicar cada lado da desigualdade por um mesmo número sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(c) Se uma desigualdade é verdadeira, então multiplicar cada lado da desigualdade por um mesmo número positivo sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(d) Se uma desigualdade é verdadeira, então multiplicar cada lado da desigualdade por um mesmo número negativo e inverter o sentido da desigualdade do resultado sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(e) Se uma desigualdade é verdadeira, então elevar ao quadrado ambos os lados da desigualdade sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(f) Se uma desigualdade é verdadeira e ambos os lados são números não negativos, então elevar ao quadrado ambos os lados sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(g) Se uma desigualdade é verdadeira, então elevar ao cubo ambos os lados da desigualdade sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(h) Se uma desigualdade é verdadeira e ambos os lados são números não negativos, então extrair a raiz quadrada de ambos os lados sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(i) Se uma desigualdade é verdadeira, então extrair a raiz cúbica em ambos os lados da desigualdade sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(j) Se uma desigualdade é verdadeira, então aplicar módulo em ambos os lados da desigualdade sempre conduz a uma desigualdade verdadeira.

(k) Se uma desigualdade é verdadeira, então inverter os dois lados da desigualdade sempre conduz a uma desigualdade verdadeira (isto é, se $a < b$, então $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$).

(l) Se uma desigualdade é verdadeira e ambos os lados são números positivos, então inverter os dois lados e inverter o sentido da desigualdade do resultado sempre conduz a uma desigualdade verdadeira (isto é, se $a < b$ e a e b são positivos, então $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$).

10. Diga se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique.

(a) Adicionar o mesmo número a cada lado de uma inequação sempre conduz a uma inequação equivalente.

(b) Multiplicar cada lado de uma inequação por um mesmo número sempre conduz a uma inequação equivalente.

(c) Multiplicar cada lado de uma inequação por um mesmo número positivo sempre conduz a uma inequação equivalente.

(d) Multiplicar cada lado de uma inequação por um mesmo número negativo e inverter o sentido da desigualdade do resultado sempre conduz a uma inequação equivalente.

(e) Elevar ao quadrado ambos os lados de uma inequação sempre conduz a uma inequação equivalente.

(f) Elevar ao cubo ambos os lados de uma inequação sempre conduz a uma inequação equivalente.

(g) Assumindo que ambos os lados de uma inequação são números não negativos, extrair a raiz quadrada de ambos os lados da inequação sempre conduz a uma inequação equivalente.

(h) Extrair a raiz cúbica em ambos os lados de uma inequação sempre conduz a uma inequação equivalente.

11. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo:

(a) $2x \leq 7$;

(b) $-4x \geq 10$;

(c) $2x - 5 > 3$;

(d) $3x + 11 < 5$;

(e) $7 - x \geq 5$;

(f) $5 - 3x \leq -16$;

(g) $2x + 1 < 0$;

(h) $0 < 5 - 2x$;

(i) $3x + 11 \leq 6x + 8$;

(j) $6 - x \geq 2x + 9$;

(k) $\frac{1}{2}x - \frac{2}{3} > 2$;

(l) $\frac{2}{5}x + 1 < \frac{1}{5} - 2x$;

(m) $\frac{x}{3} + 2 < \frac{x}{6} - 1$;

(n) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{6} + x$;

(o) $4 - 3x \leq -(1 + 8x)$;

(p) $2(7x - 3) \leq 12x + 6$;

(q) $5(x + 3) - 2(x + 1) \leq 2x + 3$;

(r) $3(x + 1) - 2 \geq 5(x - 1) - 3(2x - 1)$;

(s) $\frac{x+2}{3} - \frac{x-1}{2} \geq x$;

(t) $(3x+1)(2x+1) \leq (2x-1)(3x+2) - (4-5x)$;

(u) $(3x - 2)^2 - (3x - 1)^2 > (x + 2)^2 - (x - 1)^2$.

12. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações simultâneas abaixo:

(a) $2 \leq x + 5 < 4$;

(b) $5 \leq 3x - 4 \leq 14$;

(c) $-1 < 2x - 5 < 7$;

(d) $1 < 3x + 4 \leq 16$;

(e) $-2 < 8 - 2x \leq -1$;

(f) $-3 \leq 3x + 7 \leq \frac{1}{2}$;

(g) $\frac{1}{6} < \frac{2x - 13}{12} \leq \frac{2}{3}$;

(h) $-\frac{1}{2} \leq \frac{4 - 3x}{5} \leq \frac{1}{4}$;

(i) $x + 1 \leq 7 - 3x < \frac{x}{2} - 1$.

13. Resolva em $\mathbb{R}$ os sistemas de inequações abaixo:

(a) $\begin{cases} 3 - 2x & \leq & 1 \\ 3x - 1 & \leq & 5; \end{cases}$

(b) $\begin{cases} 3x + 2 & \geq & 5x - 2 \\ 4x - 1 & > & 3x - 4 \\ 3 - 2x & < & x - 6. \end{cases}$

14. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo:

(a) $(3x+3)(5x-3) > 0$;

(b) $(4-2x)(5+2x) < 0$;

(c) $(6x-1)(2x+7) \geq 0$;

(d) $(5-2x)(-7x-2) \leq 0$;

(e) $(5x+2)(2-x)(4x+3) > 0$;

(f) $(3x+2)(-3x+4)(x-6) < 0$;

(g) $(3-2x)(4x+1)(5x+3) \geq 0$;

(h) $(5-3x)(7-2x)(1-4x) \leq 0$;

(i) $-x(x-1)(2-x)(x-3)(4-x) > 0$.

15. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo:

(a) $(x-3)^4 > 0$;

(b) $(3x+8)^3 < 0$;

(c) $(4-5x)^6 < 0$;

(d) $(1-7x)^5 > 0$;

(e) $(3x+5)^2 \geq 0$;

(f) $(5x+1)^{35} \leq 0$;

(g) $(5x+4)^4(7x-2)^3 \geq 0$;

(h) $(3x+1)^3(2-5x)^5(x+4)^8 > 0$;

(i) $(2x-4)^2(3x-5)^3(x-3)^4 \leq 0$;

(j) $-x^2(x-1)^3(2-x)^4(x-3)^5(4-x)^6 < 0$.

16. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo:

(a) $\dfrac{2x+1}{x+2} > 0$;

(b) $\dfrac{3-4x}{5x+1} \geq 0$;

(c) $\dfrac{3x-2}{3-2x} < 0$;

(d) $\dfrac{-3-2x}{3x+1} \leq 0$;

(e) $\dfrac{x+1}{-3x-3} < 0$;

(f) $\dfrac{5x-3}{3x-4} > -1$;

(g) $\dfrac{5x-2}{3x+4} < 2$;

(h) $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 3$;

(i) $\dfrac{3x-5}{2x-4} \leq 1$;

(j) $\dfrac{6x}{x+3} < 5$;

(k) $\dfrac{x+1}{x-2} \geq 4$;

(l) $\dfrac{(1-2x)(3+4x)}{4-x} > 0$;

(m) $\dfrac{3x+1}{(2x+5)(5x+3)} < 0$;

(n) $\dfrac{(5x+4)(4x+1)}{5-4x} \geq 0$;

(o) $\dfrac{1-2x}{(5-x)(3-x)} \leq 0$;

(p) $\dfrac{1}{x-4} < \dfrac{2}{x+3}$;

(q) $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2}{x-2}$;

(r) $\dfrac{x+1}{x+2} \geq \dfrac{x+3}{x+4}$;

(s) $\dfrac{x+5}{3x+2} \leq \dfrac{x-2}{3x+5}$;

(t) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x-3} < 0$;

(u) $\dfrac{2}{3x-1} \geq \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$.

17. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo:

(a) $x^2 - 2x + 2 > 0$;

(b) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$;

(c) $-2x^2 + 3x + 2 \geq 0$;

(d) $x^2 - 3x + 2 > 0$;

(e) $-x^2 + x + 6 > 0$;

(f) $-3x^2 - 8x + 3 \leq 0$;

(g) $-x^2 + \frac{3}{2}x + 10 \geq 0$;

(h) $8x^2 - 14x + 3 \leq 0$;

(i) $4x^2 - 4x + 1 > 0$;

(j) $x^2 - 6x + 9 \geq 0$;

(k) $-4x^2 + 12x - 9 \geq 0$;

(l) $x^2 + 3x + 7 > 0$;

(m) $x^2 + 3x + 7 < 0$;

(n) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} > 0$.

18. Explicite os conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $B - A$, sendo $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4x + 3 > 0\}$. Dê as respostas na notação de intervalo.

19. Sejam a, b e c números reais positivos. Resolva em $\mathbb{R}$ as inequações abaixo:

(a) $a(bx - c) \geq bc$;

(b) $a \leq bx + c < 2a$.

20. Sejam a, b, c e d números reais positivos que satisfazem $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Mostre que

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

21. Determine para que valores de x as expressões abaixo fazem sentido (em $\mathbb{R}$):

(a) $\sqrt{2x - 4}$;

(b) $\sqrt{4 - 2x}$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{2x - 4}}$;

(d) $\sqrt[3]{x^2 - x + 2}$;

(e) $\sqrt[6]{x^2 - 5x + 6}$;

(f) $\sqrt[4]{\dfrac{-1 - x}{-2 + x}}$;

(g) $\dfrac{\sqrt[4]{-1 - x}}{\sqrt[4]{-2 + x}}$.

Lista de exercícios parcialmente retirada e adaptada de

[1] G. Iezzi, C. Murakami – *Fundamentos de Matemática Elementar.* 7ª ed., Atual Editora, São Paulo, 2004.

[2] J. Stewart, L. Redlin, S. Watson – *Precalculus, Mathematics for Calculus.* 6ª ed., Brooks/Cole Cengage Learning, Belmont, 2014.