Assíntotas horizontais, verticais e oblíquas

Méricles Thadeu Moretti
MTM/PPGECT/UFSC

INTRODUÇÃO

Dizemos que uma reta é uma assíntota de uma curva quando um ponto ao mover-se ao longo da parte extrema da curva se aproxima desta reta. Em outras palavras, a reta assintótica e a curva ficam arbitrariamente próximas a medida que se afastam da origem do sistema de coordenadas. Frequentemente no esboço de curva surgem estas retas que podem dar significados importantes na interpretação de algum fenômeno em estudo.

Este conceito de assíntota nos dá um modo de como encontrá-las. As horizontais e verticais que são em geral as mais comuns em livros de cálculo serão apresentadas logo a seguir. Mais adiante trataremos também das assíntotas oblíquas que são incomuns nos cursos de cálculo.

Os gráficos das curvas e das assíntotas dos exercícios tratados neste texto estão apresentados no anexo ao final, eles foram traçados com o software Winplot que é livre. Os interessados podem obter cópia atualizada deste programa em http://math.exeter.edu/rparris/

1 - ASSÍNTOTAS HORIZONTAIS E VERTICAIS

Com base no conceito apresentado anteriormente, podemos estabelecer que:

- a reta x = k é uma **assíntota vertical** do gráfico de f(x) se ao menos um dos limites a seguir acontece:

$$\lim_{x \to k^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to k^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to k^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to k^-} f(x) = -\infty$$

- a reta y = b é uma **assíntota horizontal** do gráfico de f(x) se ao menos um dos limites a seguir acontece:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

EXEMPLO 1.1 Seja a função f real dada por $f(x) = \frac{2x^2}{1+x^2}$

Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2$ ou $\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{1+x^2} = 2$, concluímos que y = 2 é a única assíntota horizontal de f.

Constatamos que de fato $\lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \to \pm\infty} [\frac{2x^2}{1+x^2} - 2] = 0$. Isto significa dizer que a medida que x cresce ou decresce indefinidamente a curva $f(x)$ se aproxima arbitrariamente da reta assintótica y = 2 (ver gráfico no anexo).

EXEMPLO 1.2 Seja a função f real dada por $f(x) = \frac{3x}{x-1}$, $x \neq 1$.

Como $\lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$ ou $\lim_{x \to -\infty} \frac{3x}{x-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = 3$, podemos concluir que y = 3 é a única assíntota horizontal de f.

Além disso, verificamos que $\lim_{x \to 1^+} \frac{3x}{x-1} = +\infty$ ou que $\lim_{x \to 1^-} \frac{3x}{x-1} = -\infty$ para concluir que a reta vertical x = 1 é assíntota vertical.

Portanto, esta curva possui duas assíntotas, as retas y = 3 e x = 1 (ver anexo).

2 - ASSÍNTOTAS OBLÍQUAS

Consideremos uma curva dada por f(x) e uma reta de equação y = mx + b. Seja ainda D(y, f(x)) a distância entre o ponto (x, f(x)) e a reta y = mx + b que é dada por:

$$D(y, f(x)) = \frac{|f(x) - mx - b)|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Para que y seja uma assíntota oblíqua, devemos ter:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{|f(x) - mx - b)|}{\sqrt{1+m^2}} = 0 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} \frac{|f(x) - mx - b)|}{\sqrt{1+m^2}} = 0$$

Uma vez que o denominador é constante, estes limites só serão nulos somente se

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx - b] = 0 \text{ ou } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - b] = 0$$

Destas igualdades podemos deduzir que se y = mx + b é uma assíntota, os coeficientes m e b podem ser calculados da seguinte maneira:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ ou } m = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - mx] \text{ ou } b = \lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx]$$

Caso estes limites existem, com m ≠ 0 e y = mx + b definimos assíntotas oblíquas. Para o caso de m = 0, o cálculo de b passa a ser do mesmo jeito já definido anteriormente e usado nos Exemplos 1 e 2, ou seja, $b = \lim_{x \to +\infty} f(x)$ ou $b = \lim_{x \to -\infty} f(x)$.

EXEMPLO 2.1 Pesquisar as assíntotas da curva $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

Desenvolvimento	Comentários
$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$	Equação dada.
$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$	Outro registro da equação anterior.
$\lim_{x \to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$ $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$	x = 0 é assíntota vertical.
$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = -\infty$ ou $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$	A curva não possui assíntotas horizontais. Na linha seguinte veremos que m ≠ 0 define assíntota oblíqua.
$m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2} = 1$ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - mx = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2+1}{x} - x = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{x} = 0$	y = x é assíntota oblíqua.

EXEMPLO 2.2. Pesquisar as assíntotas da curva $y^3 - x^2(6 - x) = 0$

Desenvolvimento	Comentários
$y^3 - x^2(6-x) = 0$	Equação dada.
$y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$	Outro registro da equação anterior – forma explícita.
$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[3]{6x^2 - x^3} = -\infty$ $\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{6x^2 - x^3} = +\infty$	A curva não possui assíntota horizontal. Na linha seguinte veremos que m ≠ 0 define assíntota oblíqua.
$m = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} = -1$ $b = \lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x = 2$	y = –x + 2 é assíntota oblíqua.

EXEMPLO 2.3. Pesquisar as assíntotas da curva $y^2(x-1)-x^3=0$

Desenvolvimento	Comentários
$y^2(x-1)-x^3=0$	Equação dada.
$y=+\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$ ou $y=-\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$	Outro registro da equação anterior. A curva possui simetria em relação a reta y = 0. Por esta razão a pesquisa das assíntotas pode se restringir a uma dessas equações apenas.
$\lim\limits_{x\to 1^+}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}=+\infty$	x = 1 é assíntota vertical. Observar que a equação não é definida para $x\in(0,1]$.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}=+\infty$	A curva não possui assíntota horizontal. Na linha seguinte veremos que $m\neq 0$ define assíntotas oblíquas.
$m=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}{x}=1$ e $m=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}}{x}=-1$ $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}-x)=\dfrac{1}{2}$ e $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}+x)=-\dfrac{1}{2}$	y = x + 1/2 e y = −x −1/2 são assíntotas oblíquas.

EXEMPLO 2.4. Pesquisar as assíntotas da hipérbole de equação $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

Desenvolvimento	Comentários
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	Equação dada. Observar que a > 0 e b > 0 são constantes reais.
$y=+\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ ou $y=-\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$	Outro registro da equação anterior. A curva possui simetria em relação ao eixo x. Por esta razão, a pesquisa das assíntotas pode se restringir a uma dessas equações.
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2})=+\infty$	A curva não possui assíntota horizontal. Na linha seguinte veremos que $m\neq 0$ define assíntota oblíqua.
$m=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x})=\dfrac{b}{a}$ $m=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}}{x})=-\dfrac{b}{a}$ $b=\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\dfrac{b}{a}x)=0$ $b=\lim\limits_{x\to-\infty}(\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\dfrac{b}{a}x)=0$	As retas $y=\dfrac{b}{a}x$ e $y=-\dfrac{b}{a}x$ são as assíntotas procuradas.

EXEMPLO 2.5 Pesquisar as assíntotas do "Folium de Descartes" $x^3 + y^3 = 3axy$, $a \neq 0$.

<table>
<tr><th colspan="2">Desenvolvimento</th><th>Comentários</th></tr>
<tr><td colspan="2">$x^3 + y^3 = 3axy$</td><td>Equação dada.
Observar que esta equação não pode ser colocada na forma explícita.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$y = tx,\ x = \dfrac{3at}{1+t^3}$ e $y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}$</td><td>Outro registro da equação anterior na forma paramétrica.</td></tr>
<tr><td>$(a > 0)$
$x \to +\infty \Rightarrow t \to -1^-$
$x \to -\infty \Rightarrow t \to -1^+$</td><td>$(a < 0)$
$x \to +\infty \Rightarrow t \to -1^+$
$x \to -\infty \Rightarrow t \to -1^-$</td><td>Relação entre o crescimento arbitrário de x e t na equação $x = \dfrac{3at}{1+t^3}$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$m = \lim\limits_{x\to+\infty} (\dfrac{y}{x}) = \lim\limits_{t\to-1^-} t = -1$
$m = \lim\limits_{x\to-\infty} (\dfrac{y}{x}) = \lim\limits_{t\to-1^+} t = -1$
$b = \lim\limits_{x\to+\infty} (y - x) = \lim\limits_{t\to-1^-} (\dfrac{3at^2}{1+t^3} - \dfrac{3at}{1+t^3})$
$= \lim\limits_{t\to-1^-} \dfrac{3at(t+1)}{1+t^3} = \lim\limits_{t\to-1^-} \dfrac{3at(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = -a$
$b = \lim\limits_{x\to-\infty} (y - x) = \lim\limits_{t\to-1^+} (\dfrac{3at^2}{1+t^3} - \dfrac{3at}{1+t^3})$
$= \lim\limits_{t\to-1^+} \dfrac{3at(t+1)}{1+t^3} = \lim\limits_{t\to-1^+} \dfrac{3at(t+1)}{(t+1)(t^2-t+1)} = -a$</td><td>Cálculos efetuados para o caso a > 0.
A reta $y = -x - a$ é a única assíntota.
Para a < 0, obteremos a mesma expressão $y = -x - a$ para a assíntota oblíqua.</td></tr>
</table>

3 – EXERCÍCIOS. Pesquisar as assíntotas das curvas seguintes:

a) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 2x}$ **b**) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ (a > 0 e b > 0) **c**) $(x^2 + y^2)x - ay^2 = 0$ (Cissóide de Diocles) **d**) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$ **e**) $y^2(x-1) = x^2(x+1)$ **f**) $y^3 = 6x^2 - x^3$ **g**) $y^2 = \dfrac{x^3}{x-1}$ **h**) $y = \dfrac{\ln x}{x}$ **i**) $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ **j**) $y = \sqrt{4x^2 + x + 1}$ **k**) $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$ **l**) $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$ (Curva de Agnesi).

Respostas

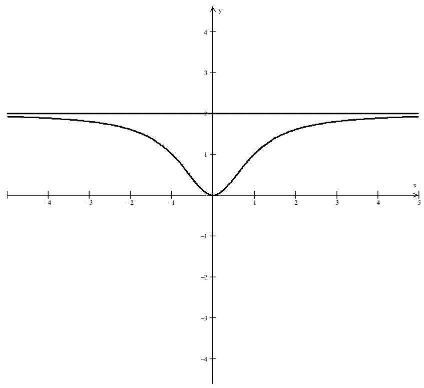
a) x = 0, x = 2 e y = x + 2 **b**) y = ±ax/b **c**) x = a **d**) y = x + 2, x = 1 **e**) y = x, y = –x, x = 1 **f**) y = –x + 2 **g**) x = 1, y = x + 1/2, y = x – 1/2 **h**) x = 0, y = 0 **i**) y = x **j**) y = 2x +1/4, y = –2x –1/4 **k**) y = x – 1/3 **l**) y = 0.

Bibliografia

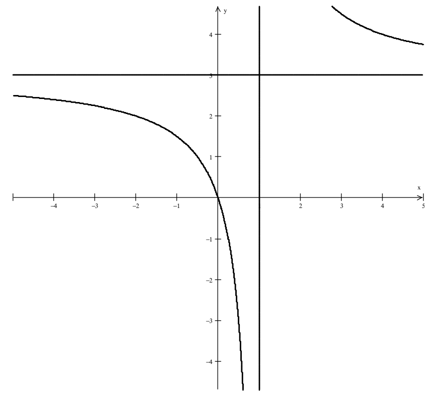
AYRES JR., Frank A. Cálculo diferencial e integral. 3ª edição. Trad. A. Zumpano. São Paulo: Makron, 1994.
GUIDORIZZI, H. L. Um Curso de Cálculo. (Volume 1, 2ª Edição). Rio de Janeiro: LCT, 1985.
KITCHEN JR., Joseph W. Calculus of one variable. Massachusetts: Addinson-Wesley, 1968.

ANEXO – Gráficos das curvas e assíntotas dos exercícios resolvidos.

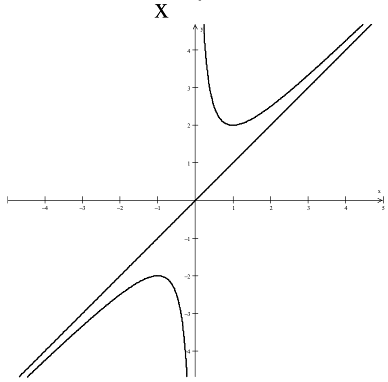
Ex.1.1: $f(x) = \dfrac{2x^2}{1+x^2}$, $y = 2$.



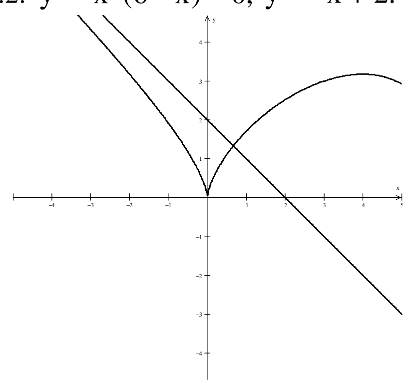
Ex. 1.2: $f(x) = \dfrac{3x}{x-1}$, $y = 3$, $x = 1$.



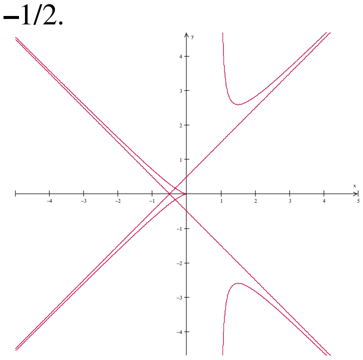
Ex. 2.1: $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, $y = x$, $x = 0$.



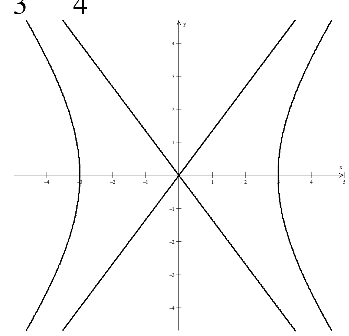
Ex. 2.2: $y^3 - x^2(6-x) = 0$, $y = -x + 2$.



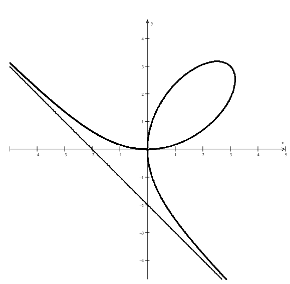
Ex. 2.3: $y^2(x-1) - x^3 = 0$. $x = 1$, $y = x + 1/2$, $y = -x - 1/2$.



Ex. 2.4: $\dfrac{x^2}{3^2} - \dfrac{y^2}{4^2} = 1$, $y = 4x/3$, $y = -4x/3$.



Ex. 2.5: $x^3 + y^3 = 3axy$, com $a = 2$. $y = -x - 2$.



Ex. 2.5: $x^3 + y^3 = 3axy$, com $a = -2$. $y = -x + 2$.