3 GEOMETRIA DE INCIDÊNCIA

Imagine que você é professor da disciplina Geometria Euclidiana e acabou de apresentar os axiomas (modificados) de Euclides. Daí um aluno engraçado diz que ele acha que "ponto" e "reta" **ambos** significam ponto e que **só há um** deles no mundo.

Nesta caso ele tem uma geometria euclidiana?

Você quer dar-lhe uma resposta atravessada, mas não se precipite! Sendo todos os axiomas frases condicionais e suas hipóteses se referem sempre a **dois ou mais pontos,** se as hipóteses são sempre falsas, os axiomas são todos verdadeiros! (Lembre-se: uma frase condicional só pode ser falsa se tiver hipótese verdadeira e tese falsa!) Goste ou não goste, seu aluno tem um sistema que **satisfaz todos** os axiomas de Euclides e deve, portanto, ser uma geometria euclidiana. É isso que você esperava da geometria euclidiana?

Ótimo! O aluno ficou um pouco menos extremo e admite que "ponto" é ponto no sentido usual e "reta" é reta no sentido usual também. Entretanto, só admite a existência de **uma única reta**.

Temos uma geometria euclidiana? Novamente, você não quer admitir isto, mas depois do desastre do único ponto, está desconfiado.

Notamos que o **Axioma 1** é verdadeiro porque qualquer par de pontos determina uma única reta - a única reta no nosso sistema. **Axioma 2** é verdadeiro; basta arrastar o segmento para "direita" ou "esquerda" na reta. **Axioma 3** é trivial; circunferências consistem de somente dois pontos. Não há ângulos retos nem pontos fora da reta; portanto **Axiomas 4 e 5** são verdadeiros.

Temos, assim, dois exemplos onde as formalidades do sistema estão satisfeitas mas nós não estamos satisfeitos. Esta discórdia vem do fato que não conseguimos concordar sobre as relações entre nossos **termos primitivos**, neste caso **ponto** e **reta**, e não temos informação sobre sua "disponibilidade" no sistema de axiomas.

Você responde que não há nada errado com o sistema e que o único problema é que temos um louco que não sabe a diferença entre reta e ponto e não sabe que há mais que uma reta no plano. Ele contra-argumenta que é cego, surdo e mudo e não tem como sentir que plano e reta são diferentes, muito menos que há muitas retas naquele lugar chamado plano. Só sabe que bolou dois sistemas onde ele entendeu as palavras primitivas e que as suas definições eram **consistentes** com os axiomas. Portanto, **por satisfazer as regras, são geometrias euclidianas.**

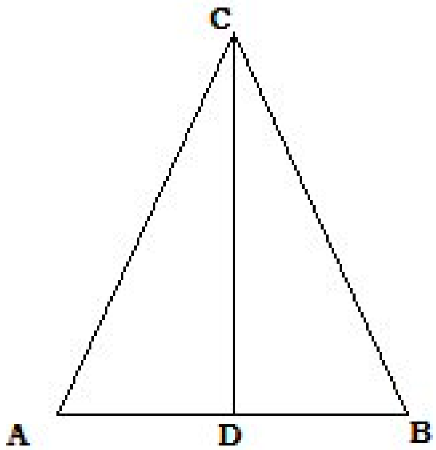
Claramente são geometrias **não desejadas**, devendo ser eliminados. Como? Basta dizer que "nós os iluminados sabemos que há muitos pontos e retas". **Não basta não!** A Exigência 4 proíbe a inclusão de informações estranhas ao sistema. Se queremos manter nosso sistema axiomático, teremos que incluir **mais axiomas** para definir melhor nosso jogo.

É claro que todo mundo, Euclides incluso, sabia que há muitas retas no plano que queremos estudar, mas na luz restrita da lógica e dos axiomas, são **fatos externos** ao sistema e não podem ser usados. (Muitos matemáticos modernos criticam duramente o sistema euclidiano pelo uso de fatos visuais extremamente óbvios mas estranhos ao sistema)

Apresentamos a seguir uma demonstração de um teorema (verdadeiro!) que não pode ser justificada pelos axiomas. Para ser honesto com Euclides, esta demonstração não é dele, mas é uma demonstração freqüentemente encontrada nos livros de segundo grau.

Teorema: Se o triângulo $\vee ABC$ tem os lados AC e BC congruentes, então tem os ângulos $\angle CAB$ e $\angle CBA$ congruentes. (Consulte a figura abaixo)

Demonstração: Seja D o ponto onde a bissetriz [1] do ângulo $\angle ACB$ intercepta AB. Os triângulos $\vee ADC$ e $\vee BDC$ são congruentes por que têm os lados AC e BC congruentes, o lado CD em comum e os ângulos $\angle ACD$ e $\angle BCD$ congruentes (por construção da bissetriz). Portanto, $\angle CAB$ e $\angle CBA$ são congruentes.



O que tem de errado nesta demonstração?

Não estamos querendo dizer que o teorema é falso. Estamos afirmando que a demonstração **não** mostra que ele é verdadeiro. Qualquer um que use lápis, compasso e régua para construir uma bissetriz "sabe" que ela corta a base do triângulo.

Desafiamos você a provar isso analiticamente usando somente os axiomas e teoremas demonstrados a partir deles. Como sabe que este ponto D realmente existe? Porque está entre A e B?

Para solucionar problemas deste tipo **adotaremos** um sistema mais restritivo de axiomas - uma versão levemente modificada dos **axiomas de David Hilbert**. Neste sistema, você será obrigado a **justificar tudo** que afirma, baseado nos Axiomas de Hilbert e a lógica dedutiva. Um argumento do tipo "é obvio do desenho" não terá vez. Antes de dizer que a bissetriz de um ângulo de um triângulo corta o lado oposto, teremos que produzir uma demonstração (Será Teorema 17 , do Travessão) e não nos basearmos apenas no desenho como foi feito acima.

Começaremos, a seguir, o desenvolvimento de um sistema axiomático mais robusto que superará estas imperfeições do sistema de Euclides. Mas para conseguirmos isto levaremos vários capítulos até completar esta apresentação. Você irá com isso aprender o uso do método axiomático, que é o método usado na matemática e ao mesmo tempo estará aprendendo a organizar e treinar o seu raciocínio lógico, que é um dos principais objetivos deste curso.

3.1 Geometria de Incidência

1

Os axiomas de Hilbert são bem mais **explícitos** e **numerosos** que os de Euclides. Eles serão introduzidos em **grupos** e cada agrupamento será devidamente explicado e justificado.

Note que dissemos justificados e não provados! Axiomas não são provados. Eles são as regras do nosso jogo e são selecionados de modo a produzir jogos interessantes - quer dizer que descrevem propriedades fundamentais do tipo de sistema que queremos estudar.

A primeira etapa é a introdução dos **axiomas de incidência**.

A partir deste momento você deve começar a fazer fichas!

Ficamos com somente três palavras primitivas - *reta*, *ponto*, *incidente* - que não definimos. (As outras virão no momento adequado.) Entendemos que **incidente** é uma palavra que se refere a **pontos** e **retas**.

O ponto P é incidente à reta r.

Podemos usar outras formas ou vocábulos para expressar esta situação. Podemos dizer que o ponto **pertence** à reta, **está sobre** a reta, **está na** reta ou podemos dizer que a reta **passa pelo** ponto. Temos três axiomas de incidência para mostrar a interligação de ponto, reta e incidente.

Axioma 1: Para cada ponto P e cada ponto Q diferente de P, há uma única reta que passa por P e por Q.

Axioma 2: Para cada reta *r*, existem pelo menos dois pontos distintos que são incidentes à *r*.

Axioma 3: Existe uma reta *r* e um ponto P que não é incidente à *r*.

Há um ditado que nada vem do nada, e é verdade. Não devemos esperar muito desta coleção parcial de axiomas. Entretanto, conseguimos evitar alguns dos exemplos desagradáveis que já mencionamos.

O **Axioma 1** é o mesmo que o primeiro axioma euclidiano. Ele nada mais é que a oficialização da noção que, dados dois pontos distintos no papel - plano -, podemos usar a régua e lápis para traçar uma reta e somente uma reta que passa pelos dois.

O **Axioma 2** elimina o primeiro exemplo de **um só ponto** e o **Axioma 3** (juntamente com o 2) elimina o segundo exemplo de apenas uma reta. Eles também oficializam observações que fizemos quando desenhamos com régua e lápis. É óbvio que cada reta que traçamos tem muitos pontos, e em particular pelo menos dois. Também é óbvio que o plano é algo mais que uma reta. Quer dizer, podemos traçar uma reta que não cobre a folha toda. De fato, nossa experiência nos diz que nenhuma reta cobre a folha. Ela atravessa a folha de um lado para o outro, deixando um “rastro” fino, para nunca mais voltar à folha.

Salientamos a necessidade de incluir nos axiomas uma declaração de existência como o **Axioma 3**. Sem ele poderíamos ficar trabalhando num vácuo. Os outros axiomas são todos frases condicionais do tipo *Se r é uma reta,...* ou *Se P é um ponto,...* E daí? Se nós fossemos Pelé seríamos famosos, mas não somos nem Pelé nem famosos. Em algum momento precisamos que dizer que há pontos e/ou retas, e é o que faz o **Axioma 3.**

Porque usar uma reta só no Axioma 3 e trabalhar para provar para todas as retas. (Exercício 2c)? Esta pergunta você poderá responder mais adiante.

Podemos provar alguns teoremas simples, mas de grande utilidade. Mas antes, temos que lembrar algumas definições.

IMPORTANTE: Você deve escrever as **Definições 1, 2 e 3** onde deverão ser definidos os conceitos de **retas paralelas**, **pontos colineares** e **retas concorrentes**[2] usando os termos primitivos estipulados acima.

Teorema 1: Se r e s são retas distintas e não são paralelas, então r e s têm um único ponto em comum.

Teorema 2: Existem pontos não colineares.

Teorema 3: Dado um ponto, há uma reta que não passa por ele.

Teorema 4: Para cada ponto P, existe pelo menos duas retas distintas que passam por P.

Teorema 5: Existem três retas distintas e não concorrentes.

Teorema 6: Para cada reta r, existe um ponto P não incidente à r.

3.2 Modelos Para Um Sistema Axiomático

Um sistema de axiomas nada mais é que uma listagem de regras secas num pedaço de papel. Você se alegra ao ler as regras da FIFA? Não é mais interessante ver um jogo? Bem, o jogo é um jogo, uma atividade física que podemos ver e apreciar (ou odiar, como no caso das viúvas de domingo à tarde, quando os maridos sentam por horas em frente da TV, morto para o resto do mundo, assistindo os sete jogos nos quatro canais de TV). Estes jogos são **modelos** do sistema de regras – uma situação em particular real em que as regras são obedecidas (geralmente).

Mais abstratamente, mas olhando para nossa **geometria de incidência**, um modelo seria uma interpretação do sistema onde damos um **significado específico** aos termos primitivos - **ponto**, **reta** e **incidente**. Feito isso, temos que verificar que os axiomas são satisfeitos quando os termos têm estes significados.

3.2.1 Modelo das Três Letras

Por exemplo, podemos entender que **ponto** é qualquer uma das três letras A, B ou C. Podemos entender que *reta* significa um conjunto que contém dois pontos distintos - as retas são {A, B}, {A, C} e {B, C}. Entendemos que um ponto é *incidente a* uma reta se o ponto pertence à reta no sentido de elemento de conjunto.

Agora que nossos termos primitivos têm **significados específicos**, temos que ver se temos uma geometria de incidência - se os axiomas são verdadeiros (isto é, se são satisfeitos para este modelo).

2

É claro que qualquer par de pontos distintos determina uma reta; é a identificação que demos para reta neste modelo. É igualmente claro que em cada reta (um par de letras) passa por (pertence) dois pontos (letras) distintos. Sendo que {A, B} é uma reta e C é um ponto fora desta reta, o terceiro axioma também é verdadeiro. Assim, temos um **modelo** para nossa geometria.

Se incluirmos mais um, dois, três ou qualquer número (finito) de pontos, e mantermos **reta** como conjunto de dois pontos e **incidente** como **elemento do conjunto** obtemos outros modelos que satisfazem os axiomas.

Podemos ter um modelo com somente dois pontos?

O próximo modelo que veremos deixa claro a escolha da palavra **incidente** para substituir a palavra **pertence** que usamos no modelo usual da geometria plana.

3.2.3 Modelo dos Seis Alunos

Escolhemos seis alunos do curso, Maria, José, Pedro, Ana, Eva e João. Declaramos que os três primeiros são **pontos** e os três últimos são **retas**. Declaramos também que Maria e José são incidentes a Ana, que José e Pedro são incidentes Eva e que Maria e Pedro são incidentes a João. Um pouco de trabalho braçal mostra que temos um modelo que satisfaz os Axiomas 1 a 3.

Perguntamos: Maria pertence a Ana ou João? Pensamos que a escravidão tinha sido eliminada no Brasil já no século 19.

No modelo usual, **pertence** é uma palavra perfeitamente aceitável, mas insistimos no uso da palavra **incidente** exatamente para **quebrar o hábito** de olhar para um único modelo.

3.3.4 O Uso dos Modelos

Modelos são objetos interessantes em dois sentidos. Suponha que temos uma interpretação que provamos que satisfaz os axiomas. Esta interpretação passa a ser um modelo e, obrigatoriamente, **todos os teoremas** são verdadeiros para este modelo. Por que? Quer dizer, nós matemáticos trabalhamos arduamente **escolhendo** axiomas **claros** e **fáceis de comprovar** para uma interpretação específica e **provando teoremas** abstratos sobre nosso sistema axiomático.

Aí os físicos, engenheiros, economistas fazem uma interpretação específica dos termos primitivos, **facilmente verificam** os poucos axiomas e então desfrutam, de graça, de **todos os teoremas** que trabalhamos tanto para provar.

*Neste momento você pode responder a pergunta sobre a escolha da forma do **Axioma 3** - é muito mais fácil demonstrar que um modelo satisfaz o **Axioma 3** que o **Exercício 2c**.*

Modelos também são interessantes para o **matemático** que está tentando ver se uma afirmação é ou não um teorema. Ele testa a afirmação em **vários modelos**; se em um modelo a afirmação deixa de ser verdadeira, ele não será teorema e não adianta perder tempo tentando prová-la.

Estas idéias de sistema axiomático abstrato e modelos concretos são relativamente modernos; certamente muitos séculos posteriores a Euclides e os outros geômetras gregos. Para ser justo com Euclides, temos que reconhecer que na época dele, os geômetras se interessavam em somente um “modelo”, a folha de papel com as retas traçadas com régua e lápis, ou seja, o plano Certos fatos eram simplesmente óbvios demais para merecer discussão, muito menos axiomatização. Entretanto, com o descobrimento de sistemas nunca imaginados pelos gregos, como **geometrias hiperbólicas**, o **plano projetivo** e a **geometria diferencial** (onde a medida de distância **muda** de ponto em ponto) bem como **o computador** que não faz nada sem instruções explícitas, a importância dos sistemas axiomáticos aumentou muito e continua a crescer. Com isso os matemáticos ficaram muito mais exigentes com o **rigor** de uma demonstração e por consequência na escolha dos axiomas.

3.3 Cultura Geral

Uma **geometria finita** é um modelo para uma geometria de incidência que contém um número finito de pontos. Vimos acima geometrias finitas com 3, 4, 5, ... pontos.

Perguntas: é possível achar uma ***geometria finita*** *onde algumas retas têm* ***mais*** *que dois pontos? Pode achar uma geometria finita onde cada reta contém exatamente três pontos? Se puder, qual é o número mínimo de pontos e retas?*

Na geometria euclidiana temos um axioma (das paralelas euclidianas) que diz que para cada ponto fora de uma reta, há uma única paralela que passa pelo ponto. Vamos olhar para um modelo onde *ponto* significa ponto na esfera, *reta* significa o conjunto de pontos num grande círculo e *incidente a* significa que o ponto pertence à reta no sentido de um elemento de conjunto. Neste modelo, não há um único par de paralelas. Esta geometria satisfaz o que chamamos de *propriedade das paralelas elípticas* - não há retas paralelas na geometria. O modelo da geometria finita com somente três pontos é outro exemplo de uma geometria que satisfaz esta propriedade. No exemplo de uma geometria finita com quatro pontos *A*, *B*, *C* e *D* e as retas $\{A,B\}$, $\{A,C\}$, $\{A,D\}$, $\{B,C\}$, $\{B,D\}$ e $\{C,D\}$, notamos que o **axioma das paralelas euclidianas** é válido. (Comprove!) Entretanto, o modelo com cinco pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* e as dez retas de pares de pontos é bem diferente. As retas $\{C,D\}$ e $\{C,E\}$ passam por C e são paralelas à reta $\{A,B\}$. Este é um exemplo do que chamamos de *propriedade das paralelas hiperbólicas* - para cada reta e ponto fora da reta, há pelo menos duas retas paralelas à reta original que passam pelo ponto.

3.4 Demonstração dos Teoremas

Discutimos um pouco a escolha dos axiomas e os modelos que poderiam satisazê-los. Vamos agora entrar no assunto que seguiremos até o final deste curso: **as demonstrações dos teoremas**. É aqui que você deverá se **concentrar** para entender e adquirir alguma habilidade. Já escolhemos os três primeiros axiomas, temos três definições e escrevemos os seis primeros teoremas. As regras já foram estabelecidas. O “jogo” vai começar! Não se esqueça também de seguir as quatro **exigências**.

No início iremos comentar muito cada pequeno detalhe, para que você entenda “as bases” dos raciocínios e as idéias envolvidas. Aos poucos, à medida que você vai se acostumando não precisaremos mais de “longas” discussôes, poderemos simplesmente usar o que já discutimos. Mas sempre que dúvidas voltem a surgir, não espere, volte e reveja as discussões, pois em cada “releitura” você aprenderá algo “novo” que não havia percebido da primeira vez.

Teorema 1: Se *r* e *s* são retas distintas e não são paralelas, então *r* e *s* têm um único ponto em comum.

Antes de provar este teorema, faremos algumas considerações, algumas de natureza geral e outras específicas deste teorema. Considere a frase:

Cada par de retas não paralelas tem um único ponto em comum.

Diz a mesma coisa que o **Teorema 1**? Nossa resposta é: sim. Isto é, o teorema é uma declaração universal, apesar de tentar esconder este fato.

Como podemos provar a veracidade desta declaração **universal**? Agiremos do jeito que você provavelmente teria agido se não tivéssemos levantado esta questão; escolherá **arbitrariamente** duas retas não paralelas e **provará** que estas duas retas têm um único ponto em comum. Numa demonstração discursiva[3] isto é feito geralmente através de uma frase do tipo

Sejam r e s retas distintas e não paralelas.

Na ficha de demonstração, pode ser feito mais simplesmente através de

r e s são retas distintas e não paralelas.

Quer dizer, você lança mão de duas retas não paralelas **sem qualquer condição ou parcialidade**. Tendo as retas na mão você dá nomes *r* e *s* a elas para **facilitar** a comunicação. Neste momento, *r* e *s* não são mais variáveis; são constantes (mesmo que temporariamente) e suas atribuições **não podem** ser alterados ou emendados (pelo menos enquanto você não chega a conclusão que esta querendo chegar). Ao dar o nome *r* à reta, você implicitamente[4] **fixa** a reta. Uma vez que a reta está fixa, não pode **mudar suas características**.

Seus pais queriam um bebe, qualquer bebe. De repente nasce uma linda bebe menina morena a quem atribuem o nome Maria. Note que eles não faziam exigência qualquer no inicio, se comprometendo a aceitar a que vier; veio uma menina que, para conveniência de comunicação, chamaram de Maria. Não podem neste momento exigir do médico um bebe loira com olhos azuis esverdeados; já têm Maria.

Do mesmo modo, como você não fez (nem podia, neste caso) qualquer exigência da reta que escolheu e chamou de *r*, não pode fazê-las a partir de agora. Se você quer uma reta com uma propriedade, tem que exigir **na hora da escolha**:

Seja r uma reta com a propriedade P.

Neste momento terá que justificar como sabe que **existe** uma reta com esta propriedade. Alunos iniciantes freqüentemente cometem outro engano neste processo de declaração de objetos usados. Aqui no **Teorema 1**, temos uma reta chamada de *r*; lá no Teorema 3 há menção de uma reta chamada de *r*.

Nada neste mundo diz que estas retas são a mesma!

3

4

Lembre-se que o que importa é o **objeto** e as **propriedades** que ele tem - no **Teorema 1** uma reta escolhida aleatoriamente - e **não o nome** *r* a dada ela.

Você ganhou o nome de Maria;
será que você é a única moça no mundo que responde ao nome Maria?

Moral da história: dentro da demonstração, o nome *r* é sagrado: o nome só tem **valor** dentro da demonstração. Os teoremas tentam estabelecer relações entre objetos do sistema, **independente** dos nomes dados a eles.

Voltemos à demonstração do **Teorema 1**.

Vimos assim, que o teorema tem como hipótese a frase:

r e s são retas distintas e não paralelas.

O que aconteceu com o *se* ? Acontece que as duas palavras *se* e *então* são conectivas usadas pela língua portuguesa para designar **premissa** e **conclusão** numa frase condicional; elas não fazem parte nem da hipótese um nem da tese - são a cola que os unem.

Conseguiu entender a hipótese?

Vamos lá. *Reta* ? É uma palavra **primitiva**. *Distinta* ? Não deve ser problema para ninguém, simplesmente não são a mesma. *Paralela?* Opa! O que é isso? Lembrou ou não? Se não tem certeza absoluta volte para trás até encontrar a **definição** de paralelas que você já DEVERIA TER ESCRITO. Agora você já sabe onde começar.

Onde está a **tese**?

r e s têm um único ponto em comum.

O que significa *ponto em comum* ? Significa que há um ponto P que é incidente a **ambas** as retas. Você concorda?

E quanto a ser um ponto **único**? Que tem somente um ponto comum.

Veja que teremos que provar **duas** coisas na tese; quer dizer, a demonstração será dividida em duas partes:

1) **achar um** ponto comum que podemos chamar de P e
2) mostrar que **não há outro** ponto comum além de P.

Como faremos isso?

A demonstração da primeira afirmação segue um caminho normal, mas a segunda frase é nova.

Como provamos que algo é único ou, neste caso, que P é o único ponto comum?

Geralmente usamos uma das duas técnicas a seguir:

1) Assumimos que Q também é um ponto comum e provamos que P e Q são o mesmo ponto ou
2) Assumimos que Q também é um ponto comum diferente de P e alcançamos uma contradição.

Veremos como isto funciona dentro da demonstração.
Neste momento nossa ficha será assim:

Nº 1	
	X Teorema ____Lema
Hipótese: *r* e *s* são retas distintas e não paralelas.	
Tese: *r* e *s* têm um único ponto em comum.	
Demonstração	
Afirmação	Justificativa
1. *r* e *s* são retas distintas e não paralelas. Provar que há ponto em comum 2. *r* e *s* não são paralelas. 3. P é um ponto incidente a *r* e a *s*.	1. hipótese 2. Regra de Lógica 9b 3. linha 2 e negação de *paralela*

Nossa tarefa agora é provar que **não há** outro ponto comum alem deste que chamamos de P.

Como podemos provar isso?

Cada vez que tentamos comprovar uma negação, somos tentados a olhar inicialmente para uma demonstração **por contradição** ou usar uma **versão contrapositiva** de um teorema ou axioma. Vamos negar a tese para ver o que sai.

r e s têm dois pontos distintos em comum.

O que sabemos a respeito de retas e dois pontos? Neste momento, não sabemos muito e podemos nos dar o luxo de simplesmente olhar para cada um dos três fatos que sabemos ser verdadeiros, os três axiomas. Vamos **olhar bem** para a declaração de unicidade no **Axioma 1** e o **adaptar** para a linguagem deste teorema.

Se *P e Q são pontos distintos e r e s são retas que passam por P e por Q,*
então *r e s são iguais.*

A versão **contrapositiva** é

Se *r e s são retas distintas* ***então***
ou os pontos P e Q são iguais ou um deles não é comum às retas r e s.

Por ser originada de um axioma a frase acima tem que ser verdadeira. Sabemos que *r* e *s* são distintas (hipótese do teorema); logo a **hipótese da afirmação acima é verdadeira**. Por *modus ponens*, (regra lógica 2), concluímos que uma das duas sub-frases da tese é verdadeira e não é a segunda! Então qual é?

Viu como foi fácil. Nosso plano de ataque é simplesmente olhar para a contrapositiva do Axioma 1 e cuidar dos detalhes. Vamos continuamosa nossa folha de demonstração.

Nº 4	Tipo
	X Teorema ___ Axioma ___ Definição
Estrutura Lógica	
Condicional	
Hipótese: *r* e *s* são retas distintas e não paralelas.	
Tese: *r* e *s* têm um único ponto em comum.	
Demonstração	
Afirmação	**Justificativa**
1. *r* e *s* são retas distintas e não paralelas.	1. hipótese, regra lógica 1
Provar que há ponto em comum	
2. *r* e *s* não são paralelas.	2. Regra de Lógica 9b
3. P é um ponto incidente a *r* e a *s*.	3. linha 2 e definição de *paralela*
Provar a unicidade de P (vamos provar, por contradição, que: se Q é um ponto incidente a r e s então Q é igual a P)	
4. Q é um ponto incidente a r e s e Q não é igual a P.	4. Regra lógica 3
5. Q não é igual a P	5. Regra lógica 9b
6. t é a única reta que passa por P e Q	6. axioma 1 e Regra de Lógica
7. r e s passam por P e Q	7. linha 3, 4
8. t, r e s são a mesma reta	8. linha 6 e 7
9. r e s são iguais	9. linha 8
10. r e s são retas distintas	10. linha 1. Regra lógica 9b
11. r e s são iguais e r e s não são iguais	11. linha 9 e 10. Regra lógica 9b
12. linha 11 é uma declaração falsa	12. Regra lógica 10
13. se Q é um ponto incidente a r e s então Q é igual a P	13. linhas 4-11 Regra lógica 3
14. *r* e *s* têm um único ponto em comum. (TESE - Fim)	14. linha 3, linha 13

F

Há mais uma coisa a notar nesta demonstração:

Na linha 4 introduzimos um fato aparentemente novo na demonstração, mas, na realidade, não é bem assim. Note as linhas 4 até 9 marcadas em azul. Temos por objetivo provar a veracidade da frase condicional contida na linha 10. Como faremos isso? De acordo com a

Regra de Lógica 1 (Teorema da Dedução), devemos **assumir a hipótese** da frase condicional e, a partir desta, **provar a tese**. Na linha 4 assumimos a hipótese e na linha 9 anunciamos a demonstração da tese. Assim podemos confirmar a veracidade da frase condicional.

Todo cuidado é pouco nesta área. Não podemos ir criando hipóteses extras ao bel prazer; temos que justificar sua inclusão, como o fizemos na linha 4. Geralmente, como é o caso aqui, estas hipóteses extras têm vida curta. Assumimos a hipótese da frase condicional para poder provar sua tese; **FEITO ISTO, A HIPÓTESE AUXILIAR PERDE SEU EFEITO**. Deste modo, uma vez comprovada a frase condicional, a hipótese auxiliar e todas as afirmações intermediárias, que são dependentes da hipótese temporária, perdem sua utilidade. A única frase que pode der usada no restante da demonstração é a frase condicional número 10.

Se isto ainda lhe parece confuso, considere a seguinte situação não matemática.

Um grupo da turma está conversando a respeito dos outros alunos da turma, especialmente a sua generosidade. De repente um do grupo diz,

"Se Maria tivesse um trilhão de reais na sua conta bancária, ela compraria um carro novo para cada aluno da turma".

Daí o grupo debate a veracidade da afirmação e, considerando a ajuda que Maria sempre deu às colegas, sua prestabilidade e outras qualidades, conclui que, se dispondo tal quantia assustadora de riqueza, Maria compraria os carros.

Vocês realmente esperam receber estes carros novos?
Maria tem um trilhão de reais na sua conta corrente?

Durante a discussão, vocês consideram que ela tinha o dinheiro e imaginavam o que ela faria com ele, concluindo que compraria os carros. De fato, nem o dinheiro nem os carros existem; somente a convicção que Maria é tão generosa que, se pudesse, compraria os carros.

A hipótese e tese perdem seu efeito e somente a frase condicional permaneçe e é verdadeira.

A mesma coisa acontece com o argumento matemático. Uma demonstração discursiva do Teorema 1, baseado nesta folha, poderá ter a seguinte forma.

> Sejam *r* e *s* retas distintas e não paralelas. Por serem não paralelas, as retas têm pelo menos um ponto em comum que denotaremos por P. Basta provar que P é o único ponto comum às retas *r* e s. Para fazer isto, escolhemos um ponto Q comum as duas. Pelo Axioma 1, se P e Q fossem distintos haveria uma única reta que passaria por eles, e portanto $r = s$. Como este não é o caso, concluímos que $Q = P$; quer dizer, P é o único ponto comum a *r* e *s*.

Notamos que esta demonstração é bem mais enxuta que a demonstração na folha e com menos detalhes. Qual é melhor? A resposta é ***depende***. Para um aluno de mestrado a demonstração deveria ser algo assim:

O teorema segue imediatamente do Axioma 1.

Este aluno teria experiência suficiente para preencher as detalhes mentalmente, sem escrever coisa alguma. Vocês poderiam fazer o mesmo?

A demonstração discursiva é escrita com o detalhamento exigido pelo **público alvo**; as folhas demonstrativas têm cada pequeno detalhe listado. É **obrigação** daquele que escreve a demonstração incluir detalhes e justificativas suficientes para que o leitor entenda o que foi escrito.

Seguramente seus alunos do ensino fundamental e médio vão exigir um razoável detalhamento; quando houver dúvida, coloque mais detalhes.

Um último lembrete: Ao escrever a demonstração discursiva, não abandone a organização e argumentos da ficha, nem as regras gramaticais da língua portuguesa!

Analisaremos a demonstração de mais um teorema:

Teorema 2: Existem pontos não colineares.

Vamos procurar a hipótese e a tese do teorema. Por mais que manipulemos a frase e não consigamos achar uma **estrutura de causa e efeito** - hipótese e tese; a frase simplesmente **não** é uma frase condicional.

O que faremos sem hipótese?

Considere a frase

Se vamos para praia da Joaquina num dia ensolarado de janeiro, então veremos muitas moças de biquíni.

Vocês estão vendo moças de biquíni neste momento? Por que não? Nossa frase garante a visão de moças de biquíni, desde que certos **pré-requisitos** estejam satisfeitos. Na Joaquina vocês podem ver moças de biquíni; na sala de aula não podem.

Agora, considere a frase:

Vocês são inteligentes.

Na Joaquina são inteligentes, mas na sala de aula são lerdos? Nada disto! A frase diz que são inteligentes em **qualquer lugar**, em qualquer hora e em qualquer circunstancia, independente de qualquer condição.

Para provar o teorema, teremos que produzir os três pontos não colineares sem qualquer precondição (ou hipótese).

Mas se não temos hipótese, e a lógica dedutiva tem que ter ponto de partida, como podemos construir uma demonstração?

É simples. Mesmo sem hipótese explicita, temos quatro candidatos para iniciar: os três axiomas e o Teorema 1. <ABRIR QUADRO-DESTAQUE> Assim veja que nunca ficamos sem hipótese, mesmo que não há uma hipótese explicita, sempre temos os axiomas e todos os resultados provados anteriormente.<FECHAR QUADRO-DESTAQUE>

Levando esta discussão, como podemos formular uma demonstração?

Como não há hipótese, não precisamos analisá-la. Por não haver hipótese, a **frase toda é tese**. Daí, perguntamos o que significa

Existem três pontos não colineares?

Vimos que precisamos encontrar pontos e que eles não devem ter uma propriedade chamada **colinearidade**. Se não lembram de cor, busquem a **definição de colinear** e em seguida escreva a sua negação para entender o que *não colinear* significa.

Próximo passo?? Bem, antes de provar que pontos não são colineares, temos que **ter pontos**. O que pode nos fornecer pontos. Examinemos os únicos quatro resultados que temos e observemos que, entre eles, somente o **Axioma 3** nos dá pontos - melhor dizer, um ponto. Mas também, além do ponto, ele nos dá uma reta.

Não queremos um ponto e uma reta, queremos três pontos. Como trocar a reta por mais dois pontos? Será que o **Axioma 2** ajuda? Obtidos os pontos, usaremos o **Axioma 1** ou o Teorema 1 para provar que não são colineares.

Plano de ação:

1) Conseguir pontos: um P (fora da reta *r*) e A e B incidentes à reta.
   Axioma 3, depois Axioma 2
2) Provar que não são colineares.
   Por contradição - se a reta *s* passa pelos 3, passa pelos os dois de *r* (A e B) e então *s* e *r* são iguais - o terceiro ponto é incidente a *s* mas não incidente a *r* = *s* ??? contradição!

Assim, está na hora fazer a folha de demonstração.

<table>
<tr><td rowspan="2">Nº 5</td><td>Tipo</td></tr>
<tr><td>X Teorema ___ Lema</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Hipótese: Não há</td></tr>
<tr><td colspan="2">Tese: Existem pontos não colineares</td></tr>
<tr><td colspan="2">Demonstração</td></tr>
<tr><td>Afirmação</td><td>Justificativa</td></tr>
<tr><td>1. r é uma reta e P é um ponto não incidente à r
2. A e B são pontos distintos incidentes a r

Temos os pontos e usaremos uma demonstração por contradição para provar que não são colineares.

3. P, A e B são colineares
4. s é uma reta que passa por P, A e B
5. s passa por A e B
6. s = r
7. P é incidente á r
8. P é incidente á r e P não é incidente á r
9. Linha 8 é falsa
10. P, A e B não são colineares
11. Existem pontos não colineares</td><td>1. Axioma 3, Regra lógica 9g

2. Axioma 2

3. Hipótese Auxiliar (Regra de Lógica 3)
4. linha 3 e definição de colinear
5. linha 3 e Regra de Lógica 9b
6. linha 2, linha 5, Axioma 1
7. linha 4, linha 6
8. linha 1, linha 7
9. Regra de Lógica 10
10. linhas 3-9, Regra de Lógica 3
11. linha 10, Regra de Lógica 9g</td></tr>
</table>

Apresentamos a seguir uma demonstração discursiva do **Teorema 2** baseada na ficha acima.

Teorema 2: Existem pontos não colineares.

Demonstração: Aplicamos o Axioma 3 para obter uma reta *r* e um ponto P não incidente a *r*. Como cada reta possui pelo menos dois pontos, escolhemos dois pontos distintos A e B, ambos incidentes a *r*. Queremos afirmar que estes pontos não são colineares e, assim, satisfazem o teorema.

Suponha, por absurdo, que A, B, e P são colineares. Neste caso, há uma reta *s* que passa por todos eles e em especial, pelos pontos A e B. Deste modo, *r* e *s* têm estes dois pontos distintos em comum, o que garante que *r* e *s* são a mesma reta. Assim, de um lado, P é incidente a *r* enquanto, do outro lado, não é incidente a *r* - um absurdo. Deste modo P, A, e B não são colineares e a demonstração está terminada.

Uma observação final: o que teria acontecido se tivéssemos "errado" e escolhidos os pontos A e P na linha 5 da folha? Nada de mal! Teríamos que *r* e *s* não são paralelas (têm A em comum) e distintas (uma passa por P e a outra não). Assim, pelo Teorema 1, não poderiam ter um segundo ponto (o ponto B) em comum - contradição. Oba!

Em vez de ter caído num erro, achamos uma demonstração alternativa.

Exercícios:

1) Provar os teoremas 3, 4, 5 e 6.

2) Provar os seguintes teoremas.

a) Se P é um ponto, então existem pontos Q e R tais que P, Q e R não são colineares.

b) Se P e Q são pontos distintos, então existe um ponto R tal que P, Q e R não são colineares.

3) Qual é a diferença entre o Teorema 2, o Exercício 2a e o Exercício 2b? Qual é a diferença entre o Axioma 3 e o Teorema 6?

4) É verdade que cada reta passa por pelo menos três pontos distintos?

5) Provar que os três axiomas são independentes; isto é, para cada par deles, achar um modelo no qual aqueles dois são verdadeiras mas o terceiro não é.

6) Substitui o Teorema 2 no lugar do Axioma 3 e mostre que o que era Axioma 3 pode ser provado como teorema destes axiomas. Assim teremos um sistema equivalente de axiomas para a geometria finita.