# UFSC - CÁLCULO 1 - 2013.2 - 3A. PROVA (SOLUÇÃO)

RAPHAEL DA HORA

(1) Calcule $f'(-1)$, onde $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2x-1}$.

Solução:

Temos que

$$f'(x) = \frac{(2x+3)(2x-1)-(x^2+3x)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{2x^2-2x-3}{(2x-1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(-1) = \frac{2(-1)^2-2(-1)-3}{(2(-1)-1)^2} = \frac{1}{9}.$$

Resposta: 1/9.

(2) Calcule $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$, onde $f(x) = \dfrac{\tan x}{1+\sec x}$.

Solução:

Temos que $\tan x = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x}, \sec x = \dfrac{1}{\cos x}$, logo $f(x) = \dfrac{\text{sen}x}{\cos x + 1}$. Então

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(\cos x + 1) - (\text{sen}x)(-\text{sen}x)}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \text{sen}^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1+\cos x}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

$$\Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}.$$

Resposta: 2/3.

(3) Encontre a inclinação da reta tangente à curva definida por $e^{x/y} = 3x - y + 2$ no ponto $(0,1)$.

Solução:

Temos que a inclinação da reta tangente no ponto $(0,1)$ é dada por $y'$ calculado quando $x = 0$ e $y = 1$. Logo

$$\left(\frac{(1)(y)-(x)(y')}{y^2}\right) e^{x/y} = 3 - y'$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{xe^{x/y}}{y^2}\right) y' = 3 - \frac{e^{x/y}}{y}$$

Se $x = 0$ e $y = 1$, temos

$$y' = 3 - 1 = 2.$$

Resposta: 2.

(4) Sabendo que $f'(0)$ existe, $f(0) = \pi/3$ e que $xf(x) + 2\cos(f(x)) = 1$, encontre $f'(0)$.

Solução:

Temos que

$$f(x) + xf'(x) + 2f'(x)(-\text{sen}(f(x))) = 0 \Rightarrow (x - 2\text{sen}(f(x)))f'(x) = -f(x).$$

Logo se $x = 0$ e $f(0) = \pi/3$,

$$(-2\text{sen}(\pi/3))f'(0) = -\pi/3 \Rightarrow f'(0) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \pi\sqrt{3}.$$

Resposta: $\pi\sqrt{3}$.

(5) Derive $y = e^{-2x}(\cos 2x)^3$.

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} y' &= -2e^{-2x}(\cos 2x)^3 + e^{-2x}(3(\cos 2x)^2)(-2\text{sen}2x) \\ &= -2e^{-2x}(\cos 2x)^2 \left(\cos 2x + 3\text{sen}2x\right). \end{aligned}$$

Resposta: $y' = -2e^{-2x}(\cos 2x)^2 \left(\cos 2x + 3\text{sen}2x\right)$.

(6) Encontre os valores máximo e mínimo da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ no intervalo $[-1, 2]$.

Solução:

Temos que

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Portanto, como $f(-1) = -7$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 2$, 2 é o valor máximo e $-7$ é o valor mínimo.

Resposta: 2 é o valor máximo e $-7$ é o valor mínimo.

(7) Derive $y = \cos^{-1}(\sqrt{1 - x^2})$, $0 < x < 1$.

Solução:

Temos que

$$\begin{aligned} \cos y &= \sqrt{1 - x^2} = (1 - x^2)^{1/2} \\ \Rightarrow (-\text{sen}y)y' &= \frac{-2x}{2(1 - x^2)^{1/2}} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2}} \\ \Rightarrow y' &= \frac{x}{(\text{sen}y)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1 - \cos^2 y}\sqrt{1 - x^2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{1-\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-(1-x^2)}\sqrt{1-x^2}}.$$

Como $x > 0$, $\sqrt{x^2} = x$, logo

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Resposta: $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(8) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x - x}{x^3}$.

Solução:

Temos que pela regra de L'Hôspital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = \frac{-1}{6}.$$

Resposta: $-1/6$.

(9) Calcule $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Solução:

Temos que

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x}.$$

Logo pela regra de L'Hôspital

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1/x - 1}{\ln x + (x-1)(1/x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x\ln x + x - 1}.$$

Usando novamente a regra de L'Hôspital

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x\ln x + x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{\ln x + x(1/x) + 1} = \frac{-1}{2}.$$

Resposta: $-1/2$.

(10) Seja $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Determine:

(a) Os intervalos de crescimento, decrescimento e os pontos de máximo e mínimo locais.

Solução:

Temos que

$$f'(x) = \frac{(1)(x-1) - x(1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

Portanto $f'(x) < 0$ para todo $x \neq 1$ e isso implica que $f$ não possui pontos de máximo e mínimo locais, já que $f$ é descrecente em $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$.

Resposta: $f$ é decrescente em $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ e não possui máximo nem mínimo locais.

(b) Os intervalos onde a concavidade está para cima e onde está para baixo.

Solução:

Temos que

$$f''(x) = \frac{-(-1)(2(x-1))}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Portanto $f$ tem concavidade para cima no intervalo $(1, \infty)$ e concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$.

Resposta: $f$ tem concavidade para cima no intervalo $(1, \infty)$ e concavidade para baixo no intervalo $(-\infty, 1)$.