UFSC - CÁLCULO 1 - 2013.2 - 4A. PROVA

RAPHAEL DA HORA

(1) Calcule a área sob a curva $y = \dfrac{1+2x^2}{x}$ de $x = 1$ até $x = 2$.
Solução:

$$\text{Área} = \int_1^2 \left(\frac{1+2x^2}{x}\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2x\right) dx = \left[\ln|x| + x^2\right]_1^2 = \ln 2 + 3.$$

Resposta: $\ln 2 + 3$.

(2) Calcule $\displaystyle\int \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{x\sqrt{x}} dx$.
Solução:

$$\int \frac{x^3-2x^2+3}{x\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{x^3}{x^{3/2}} - 2\frac{x^2}{x^{3/2}} + \frac{3}{x^{3/2}}\right) dx = \int \left(x^{3/2} - 2x^{1/2} + 3x^{-3/2}\right) dx$$

$$= \frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{4x^{3/2}}{3} - \frac{6}{\sqrt{x}} + C.$$

Resposta: $\dfrac{2x^{5/2}}{5} - \dfrac{4x^{3/2}}{3} - \dfrac{6}{\sqrt{x}} + C$.

(3) Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})} dx$.
Solução:
Fazendo a substituição $u = 1 + \sqrt{x}$, $du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} dx$, i.e., $dx = 2(u-1)du$,

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt{x})} dx = 2\int \frac{(u-1)}{u}(u-1)du = 2\int \frac{u^2-2u+1}{u} du$$

$$= 2\int \left(u - 2 + \frac{1}{u}\right) du = u^2 - 4u + 2\ln|u| + C = (1+\sqrt{x})^2 - 4(1+\sqrt{x}) + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

Resposta: $|x| - 2\sqrt{x} + 2\ln(1+\sqrt{x}) + C$.

(4) Calcule $\displaystyle\int_0^\pi t\text{sen}3t dt$.
Solução:

Fazendo $u = t$, $dv = \text{sen}3tdt$, usando o método de integração por partes, temos $du = dt$, $v = -\dfrac{\cos 3t}{3}$,

$$\int_0^\pi t\text{sen}3tdt = -\frac{1}{3}\left[t\cos 3t\right]_0^\pi + \frac{1}{3}\int_0^\pi \cos 3tdt = \frac{\pi}{3} + \frac{1}{9}[\text{sen}3t]_0^\pi = \frac{\pi}{3}.$$

Resposta: $\pi/3$.

(5) Calcule $\displaystyle\int_0^{2\pi} \tan^3\theta\sec\theta d\theta$.

Solução:

Temos que

$$\int_0^{2\pi} \tan^3\theta\sec\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^4\theta}d\theta.$$

Fazendo a substituição $u = \cos\theta$, $du = -\text{sen}\theta d\theta$, temos que

$$\text{sen}^3\theta d\theta = -\text{sen}^2\theta du = (\cos^2\theta - 1)du = (u^2-1)du.$$

Logo temos

$$\int \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^4\theta}d\theta = \int \frac{u^2-1}{u^4}du = \int \left(u^{-2} - u^{-4}\right)du = -u^{-1} - \frac{u^{-3}}{3} + C,$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \frac{\text{sen}^3\theta}{\cos^4\theta}d\theta = \left[\frac{1}{\cos\theta} - \frac{1}{3\cos^3\theta}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Resposta: 0.

(6) Calcule $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$.

Solução:

Fazendo $u = \ln x$, $dv = \dfrac{1}{x^2}dx = x^{-2}dx$, usando o método de integração por partes, $du = x^{-1}dx$, $v = -x^{-1}$,

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx = -\left[\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 x^{-2}dx = -\frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

Resposta: $\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$.

(7) Calcule $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$.

Solução:

Fazendo a substituição $u = \ln x$, $du = \dfrac{1}{x}dx$, temos

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{u}du = \int u^{1/2}du = \frac{2}{3}u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C.$$

Resposta: $\dfrac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$.

(8) Calcule $\displaystyle\int \frac{\tan(1/x)}{x^2}dx$.

Solução:

Fazendo a substituição $u = 1/x = x^{-1}$, $du = -x^{-2}dx$, i.e., $-du = \dfrac{1}{x^2}dx$,

$$\int \frac{\tan(1/x)}{x^2}dx = -\int \tan u du = -\int \frac{\text{sen} u}{\cos u}du.$$

Agora fazendo a substituição $w = \cos u$, $dw = -\text{sen} u du$,

$$-\int \frac{\text{sen} u}{\cos u}du = \int \frac{1}{w}dw = \ln|w| + C = \ln|\cos u| + C = \ln|\cos\frac{1}{x}| + C.$$

Resposta: $\ln|\cos\dfrac{1}{x}| + C$.

(9) Calcule $\displaystyle\int \text{arcsen}(5x)dx$.

Solução:

Fazendo $u = \text{arcsen}(5x)$, $dv = dx$, usando o método de integração por partes, $v = x$ e $\text{sen} u = 5x$, logo

$$\cos u du = 5dx \Rightarrow du = \frac{5}{\cos u}dx = \frac{5}{\sqrt{1-\text{sen}^2 u}}dx = \frac{5}{\sqrt{1-(5x)^2}}dx = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}dx.$$

$$\int \text{arcsen}(5x)dx = x\text{arcsen}(5x) - 5\int \frac{x}{\sqrt{1-25x^2}}dx,$$

agora usando a substituição $w = 1 - 25x^2$, $du = -50xdx$,

$$-5\int \frac{x}{\sqrt{1-25x^2}}dx = \frac{1}{10}\int \frac{1}{\sqrt{w}}dw = \frac{1}{10}\int w^{-1/2}dw = 20w^{1/2} + C = \frac{\sqrt{1-25x^2}}{5} + C.$$

Portanto

$$\int \text{arcsen}(5x)dx = x\text{arcsen}(5x) + \frac{\sqrt{1-25x^2}}{5} + C.$$

Resposta: $x\text{arcsen}(5x) + \dfrac{\sqrt{1-25x^2}}{5} + C$.

(10) Calcule $\displaystyle\int x^3\cos x^2 dx$.

Solução:

Fazendo a substituição $w = x^2$, $du = 2xdx$, temos $x^3dx = \dfrac{x^2}{2}dw = \dfrac{w}{2}dw$, logo

$$\int x^3\cos x^2 dx = \frac{1}{2}\int w\cos w dw.$$

Agora usando $u = w$, $dv = \cos w dw$, $du = dw$, $v = \text{sen} w$, pelo método de integração por partes,

$$\frac{1}{2}\int w\cos w dw = \frac{w\text{sen} w}{2} - \frac{1}{2}\int \text{sen} w dw = \frac{w\text{sen} w}{2} + \frac{\cos w}{2} + C.$$

Portanto
$$\int x^3 \cos x^2 dx = \frac{x^2 \text{sen} x^2}{2} + \frac{\cos x^2}{2} + C.$$
Resposta: $\dfrac{x^2 \text{sen} x^2}{2} + \dfrac{\cos x^2}{2} + C.$