UFSC - CÁLCULO C - 2014.1 - 1A. PROVA (A) SOLUÇÃO

RAPHAEL DA HORA

(1) Calcule $\int_C (z+y^2)ds$, onde C é o segmento de reta de $(3,4,0)$ a $(1,4,2)$.
Solução:
Temos que

$$C: r(t) = (1-t)(3,4,0) + t(1,4,2), \quad 0 \le t \le 1,$$

$$\Rightarrow r(t) = (3-2t, 4, 2t) \text{ e } r'(t) = (-2,0,2).$$

Temos então que

$$\int_C (z+y^2)ds = \int_0^1 (2t+4^2)|r'(t)|dt = 4\sqrt{2}\int_0^1 (t+8)dt = 34\sqrt{2}.$$

(2) Calcule $\int_C e^{x^2}dx - xydy + y^2dz$, onde C é dada por $r(t) = (1,t,t^2)$, $0 \le t \le 1$.
Solução:
Temos que

$$x = 1,\ dx = 0,\ y = t,\ dy = dt,\ z = t^2,\ dz = 2tdt,$$

logo

$$\int_C e^{x^2}dx - xydy + y^2dz = \int_0^1 (-t+2t^3)dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0.$$

(3) Seja C o caminho de $(0,0)$ a $(1,1)$ pela parábola $y = x^2$, depois de $(1,1)$ a $(0,1)$ pelo segmento de reta que liga estes dois pontos e finalmente segue pelo segmento de reta de $(0,1)$ a $(0,0)$. Calcule $\int_C F\cdot dr$, onde $F(x,y) = (1-x+x^2y, e^y - \cos y^2 + xy)$.
Solução:
Veja que a curva C é uma curva fechada, que é a fronteira da região $D: 0 \le x \le 1$, $x^2 \le y \le 1$. Segue do teorema de Green

$$\int_C F\cdot dr = \int\int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(e^y - \cos y^2 + xy) - \frac{\partial}{\partial y}(1-x+x^2y)\right] dA$$

$$= \int_0^1\int_{x^2}^1 (y-x^2)dydx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2} - x^2(1-x^2)\right]dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} - \frac{1}{3} = \frac{4}{15}.$$

(4) Determine a equação do plano tangente à superfície $z = 2xy - 3x^2y^3 + y^2$ no ponto $(2, -1, 9)$.

Solução:

Seja $f(x, y, z) = 2xy - 3x^2y^3 + y^2 - z$. Temos que um vetor ortogonal à superfície dada em (x, y, z) é

$$\nabla f(x, y, z) = (2y - 6xy^3, 2x - 9x^2y^2 + 2y, -1).$$

Logo a equação do plano tangente em $(2, -1, 9)$ é dada por

$$\begin{aligned} &\nabla f(2, -1, 9) \cdot (x - 2, y - (-1), z - 9) = 0 \\ &\Rightarrow (10, -34, -1) \cdot (x - 2, y + 1, z - 9) = 0 \\ &\Rightarrow 10x - 34y - z = 45. \end{aligned}$$

(5) Calcule a área da parte da esfera com centro na origem e raio igual a 2 que está fora do cilindro dado por $x^2 + y^2 = 1$ e acima do plano xy. Use que sen $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Solução:

Temos que essa superfície S pode ser parametrizada por

$$r(\theta, \varphi) = (2\cos\theta \text{sen } \varphi, 2\text{sen } \theta \text{sen } \varphi, 2\cos\varphi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$

Logo

$$\begin{aligned} &r_\theta \times r_\varphi = -4\cos\theta \text{sen}^2\varphi \mathbf{i} - 4\text{sen}\theta \text{sen}^2\varphi \mathbf{j} - 4\cos\varphi \text{sen } \varphi \mathbf{k} \\ &\Rightarrow |r_\theta \times r_\varphi| = 4\sqrt{sen^4\varphi(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + \text{sen}^2\varphi \cos^2\varphi} \\ &\Rightarrow |r_\theta \times r_\varphi| = 4\sqrt{\text{sen}^2\varphi(\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi)} = 4\text{sen}\varphi. \end{aligned}$$

Temos então

$$\text{Área}(S) = \int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} |r_\theta \times r_\varphi| d\varphi d\theta = 4\int_0^{2\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \text{sen } \varphi d\varphi d\theta = 4\pi\sqrt{3}.$$

(6) Seja S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ que está fora do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e acima do plano xy, com orientação positiva. Calcule $\int\int_S F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = (z^2 + 2x)\mathbf{i} + (e^z + 2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Solução:

Vemos que a superfície S é dada por $x^2 + y^2 = 1$, $0 < z < 1$. Podemos calcular $\int\int_S F \cdot dS$ de duas formas distintas. Primeiramente vamos resolver da forma tradicional, i.e.,

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_D F(r(\theta, z)) \cdot (r_\theta \times r_z) dA.$$

Podemos parametrizar S por coordenadas cilíndricas,

$$S: \quad r(\theta, z) = (\cos\theta, \text{sen } \theta, z), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 < z < 1.$$

Logo

$$r_\theta \times r_z = \cos\theta \mathbf{i} + \text{sen } \theta \mathbf{j},$$

$$F(r(\theta,z)) = F(\cos\theta, \text{sen }\theta, z) = (z^2 + 2\cos\theta)\mathbf{i} + (e^z + 2\text{sen }\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\Rightarrow F(r(\theta,z)) \cdot (r_\theta \times r_z) = z^2\cos\theta + 2\cos^2\theta + e^z\text{sen }\theta + 2\text{sen}^2\theta = z^2\cos\theta + e^z\text{sen }\theta + 2.$$

Temos então que

$$\int\int_D F(r(\theta,z)) \cdot (r_\theta \times r_z) dA = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (z^2\cos\theta + e^z\text{sen }\theta + 2) dz d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\cos\theta}{3} + (e-1)\text{sen }\theta + 2 \right) d\theta = 4\pi.$$

Uma outra solução seria tampando o cilindro dado em cima e em baixo, i.e., cosidere as "tampas"

$$S_0: \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 \le 1, \text{ e } S_1: \quad z = 1, \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

Veja que $S \cup S_0 \cup S_1$ é uma superfície fechada, logo pelo teorema do divergente

$$\int\int_{S\cup S_0\cup S_1} F \cdot dS = \int\int\int_E \text{div } F dV,$$

onde $E: x^2 + y^2 < 1$, $0 < z < 1$. Veja ainda que

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_{S\cup S_0\cup S_1} F \cdot dS - \int\int_{S_0} F \cdot dS - \int\int_{S_1} F \cdot dS.$$

Temos que

$$\text{div } F = \partial_x(z^2 + 2x) + \partial_y(e^z + 2y) + \partial_z(z) = 2 + 2 + 1 = 5,$$

e usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen }\theta$, $z = z$,

$$E: \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 < r < 1, \quad 0 < z < 1.$$

Logo

$$\int\int\int_E \text{div } F dV = 5\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^1 r dz dr d\theta = 5\pi.$$

Veja que a integral acima é cinco vezes o volume do cilindro de raio 1 e altura 1. Para as outras duas integrais, temos que

$$S_0: \quad r_0(x,y) = (x,y,0), \quad x^2 + y^2 \le 1,$$

$$S_1: \quad r_1(x,y) = (x,y,1), \quad x^2 + y^2 \le 1.$$

Logo

$$\int\int_{S_0} F \cdot dS = \int\int_{D_1} 0 dA = 0,$$

$$\int\int_{S_1} F \cdot dS = \int\int_{D_1} dA = \pi,$$

onde $D_1: x^2 + y^2 \le 1$.

(7) Seja S a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que está dentro do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com orientação positiva. Calcule $\int\int_S \text{rot } F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Solução:

Segue do teorema de Stokes que

$$\int\int_S \text{rot } F \cdot dS = \int_C F \cdot dr,$$

onde C é a fronteira (bordo) de S. Veja que C é dada por $x^2 + y^2 = 1/2$ e $z = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Logo

$$C : \quad r(\theta) = \sqrt{\frac{1}{2}} (\cos\theta, \text{sen } \theta, 1), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Logo

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(\theta)) \cdot r'(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\cos\theta \text{sen}^2\theta}{2\sqrt{2}} + \frac{\cos\theta \text{sen } \theta}{2} \right) d\theta = 0.$$

(8) Calcule $\displaystyle\int\int_S F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = \big(1, 1, z(x^2 + y^2)^2\big)$ e S é a superfície da região sólida $x^2 + y^2 < 1$, $0 < z < 1$, com orientação positiva. Veja que a superfície S é fechada.

Solução:

Como S é fechada, segue do teorema do divergente que

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int\int_E \text{div } F dV = \int\int\int_E (x^2 + y^2)^2 dV,$$

onde $E : x^2 + y^2 < 1$, $0 < z < 1$. Temos que, em coordenadas cilíndricas, $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen } \theta$, $z = z$, $E : 0 \leq r < 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 < z < 1$. Logo

$$\int\int\int_E (x^2 + y^2)^2 dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 r^5 dz dr d\theta = \frac{\pi}{3}.$$