UFSC - CÁLCULO C - 2014.1 - 1A. PROVA (B)
SOLUÇÃO

RAPHAEL DA HORA

(1) Calcule $\int_C (x-y)ds$, onde C é o segmento de reta de $(1,3)$ a $(5,-2)$.

Solução.

Temos que C é parametrizada por

$$C: \quad r(t) = (1-t)(1,3) + t(5,-2) = (1+4t, 3-5t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Logo

$$\int_C (x-y)ds = \int_0^1 [1+4t-(3-5t)]|r'(t)|dt = \sqrt{41}\int_0^1 (9t-2)dt = \frac{5\sqrt{41}}{2}.$$

(2) Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y,z) = 2y\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ e C é dada por

$$r(t) = \cos t\mathbf{i} + \text{sen } t\mathbf{j} + \frac{t}{6}\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solução.

Temos que

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)dt,$$

onde

$$F(r(t)) = F(\cos t, \text{sen } t, t/6) = 2\text{sen } t\mathbf{i} - 2\cos t\mathbf{j} + (\cos t + \text{sen } t)\mathbf{k},$$

$$r'(t) = -\text{sen } t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + \frac{1}{6}\mathbf{k},$$

$$F(r(t)) \cdot r'(t) = -2\text{sen}^2 t - 2\cos^2 t + \frac{1}{6}(\cos t + \text{sen } t) = -2 + \frac{1}{6}(\cos t + \text{sen } t).$$

Logo

$$\int_0^{2\pi} F(r(t)) \cdot r'(t)dt = \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{6}(\cos t + \text{sen } t) - 2\right] dt = -4\pi.$$

(3) Seja C o caminho de $(0,2)$ a $(-2,0)$ pela circunferência $x^2+y^2=4$ segue pelo segmento de reta de $(-2,0)$ a $(0,0)$ e em seguida pelo segmento de reta de $(0,0)$ a $(0,2)$. Calcule $\int_C F \cdot dr$, onde $F(x,y) = (x^4+y^2)\mathbf{i} + (3xy+y^3)\mathbf{j}$.

Solução.

Veja que C é uma curva fechada e fronteira da região, em coordenadas polar, $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen }\theta$,

$$D: \quad 0 \leq r < 2, \quad \frac{\pi}{2} \leq 0 \leq \pi.$$

Segue do teorema de Green

$$\int_C F \cdot dr = \int\int_D \left[\partial_x(3xy + y^3) - \partial_y(x^4 + y^2)\right] dA = \int\int_D y dA$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^2 r^2 \text{sen }\theta dr d\theta = \frac{8}{3}.$$

(4) Determine a equação do plano tangente à superfície $x^2z + 2xy^2 + 3yz^2 = 6$ no ponto $(1, 1, 1)$.

Solução.

Seja $f(x, y, z) = x^2z + 2xy^2 + 3yz^2$. Temos que um vetor ortogonal à superfície dada no ponto (x, y, z) é

$$\nabla f(x, y, z) = (2xz + 2y^2, 4xy + 3z^2, x^2 + 6yz).$$

Logo a equação do plano tangente à superfície dada é

$$\nabla f(1, 1, 1) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (4, 7, 7) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0$$

$$\Rightarrow 4x + 7y + 7z = 18.$$

(5) Calcule a área da parte da esfera com centro na origem e raio igual a 1 que está dentro do cilindro dado por $x^2 + y^2 = 1/2$ e acima do plano xy. Use que sen $\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Solução.

Temos que essa superfície é dada por $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 < 1/2$, $z > 0$. Podemos parametrizar S por

$$S: \quad r(\theta, \phi) = (\cos\theta\text{sen }\varphi, \text{sen }\theta\text{sen }\varphi, \cos\varphi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \varphi < \pi/4.$$

Logo

$$\text{Área}(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} |r_\theta \times r_\varphi| dA,$$

onde

$$r_\theta \times r_\varphi = -\cos\theta\text{sen}^2\varphi\mathbf{i} - \text{sen }\theta\text{sen}^2\varphi\mathbf{j} - \cos\varphi\text{sen }\varphi\mathbf{k}.$$

Temos então

$$|r_\theta \times r_\varphi| = \sqrt{\text{sen}^4\varphi(\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta) + \cos^2\varphi\text{sen}^2\varphi} = \sqrt{\text{sen}^2\varphi(\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \text{sen }\varphi,$$

e

$$\text{Área}(S) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \text{sen }\varphi d\varphi d\theta = \pi(2 - \sqrt{2}).$$

(6) Seja S a parte do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ que está dentro da esfera $x^2+y^2+z^2 = 2$, orientada positivamente. Calcule $\int\int_S F \cdot dS$, onde $F(x,y,z) = (z^2+2x)\mathbf{i} + (e^z + 2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.

Solução.

Vemos que a superfície S é dada por $z = \sqrt{x^2+y^2}$, $0 \leq z < 1$. Podemos calcular $\int\int_S F \cdot dS$ de duas formas distintas. Primeiramente vamos resolver da forma tradicional, i.e.,

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_D F(r(\theta,z)) \cdot (r_\theta \times r_z) dA.$$

Podemos parametrizar S por $x = z\cos\theta$, $y = z\text{sen }\theta$, $z = z$,

$$S: \quad r(\theta,z) = (z\cos\theta, z\text{sen }\theta, z), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z < 1.$$

Logo

$$r_\theta \times r_z = z\cos\theta\mathbf{i} + z\text{sen }\theta\mathbf{j} - z\mathbf{k},$$

$$F(r(\theta,z)) = F(z\cos\theta, z\text{sen }\theta, z) = (z^2 + 2z\cos\theta)\mathbf{i} + (e^z + 2z\text{sen }\theta)\mathbf{j} + z\mathbf{k},$$

$$\Rightarrow F(r(\theta,z))\cdot(r_\theta \times r_z) = z^3\cos\theta + 2z^2\cos^2\theta + ze^z\text{sen }\theta + 2z^2\text{sen}^2\theta - z^2 = z^3\cos\theta + ze^z\text{sen }\theta + z^2.$$

Temos então que

$$\int\int_D F(r(\theta,z)) \cdot (r_\theta \times r_z) dA = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (z^3\cos\theta + ze^z\text{sen }\theta + z^2) d\theta dz = 2\pi \int_0^1 z^2 dz = \frac{2\pi}{3}.$$

Uma outra solução seria tampando o cone dado em cima, i.e., cosidere a "tampa"

$$S_1: \quad z = 1, \quad x^2+y^2 \leq 1.$$

Veja que $S \cup S_1$ é uma superfície fechada, logo pelo teorema do divergente

$$\int\int_{S\cup S_1} F \cdot dS = \int\int\int_E \text{div } F dV,$$

onde $E: x^2+y^2 < 1$, $\sqrt{x^2+y^2} < z < 1$. Veja ainda que

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int_{S\cup S_1} F \cdot dS - \int\int_{S_1} F \cdot dS.$$

Temos que

$$\text{div } F = \partial_x(z^2+2x) + \partial_y(e^z+2y) + \partial_z(z) = 2+2+1 = 5,$$

e usando coordenadas cilíndricas $x = r\cos\theta$, $y = r\text{sen }\theta$, $z = z$,

$$E: \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq r < 1, \quad r < z < 1.$$

Logo

$$\int\int\int_E \text{div } F dV = 5\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r dz dr d\theta = \frac{5\pi}{3}.$$

Para a outra integral, temos que

$$S_1: \quad r_1(x,y) = (x,y,1), \quad x^2+y^2 \leq 1.$$

Logo

$$\int\int_{S_1} F \cdot dS = \int\int_{D_1} dA = \pi,$$

onde $D_1 : x^2 + y^2 \leq 1$.

(7) Seja S a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2$ que está dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 4$, orientada positivamente. Calcule $\displaystyle\int\int_S \text{rot } F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = (3z - 2x, y, z + 2x)$.

Solução.

Segue do teorema de Stokes que

$$\int\int_S \text{rot } F \cdot dS = \int_C F \cdot dr,$$

onde C é a fronteira de S, que é dada por

$$C : \quad x^2 + y^2 = 4, \quad z = 4.$$

Logo

$$C : \quad r(\theta) = (2\cos\theta, 2\text{sen } \theta, 4), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Temos então

$$\int_C F \cdot dr = \int_0^{2\pi} F(r(\theta)) \cdot r'(\theta) d\theta,$$

onde

$$r'(\theta) = (-2\text{sen } \theta, 2\cos\theta, 0),$$

$$F(r(\theta)) = F(2\cos\theta, 2\text{sen } \theta, 4) = (12 - 4\cos\theta, 2\text{sen } \theta, 4 + 4\cos\theta),$$

$$\Rightarrow F(r(\theta)) \cdot r'(\theta) = -24\text{sen } \theta + 8\cos\theta\text{sen } \theta + 4\cos\theta\text{sen } \theta = 12\cos\theta\text{sen } \theta - 24\text{sen } \theta.$$

Temos então que calcular

$$\int_0^{2\pi} (12\cos\theta\text{sen } \theta - 24\text{sen } \theta)\, d\theta = 0.$$

(8) Seja E a região sólida de $\mathbb{R}^3$ que está entre a esfera de raio 1 e centro na origem e o cubo com centro na origem e lado 4, i.e., $E : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2$ e $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$, $-2 \leq z \leq 2$, orientada positivamente. Seja S a fronteira de E. Calcule $\displaystyle\int\int_S F \cdot dS$, onde $F(x, y, z) = (y^2, z^2, x^2)$.

Solução.

Veja que S é uma superfície fechada, logo pelo teorema do divergente

$$\int\int_S F \cdot dS = \int\int\int_E \text{div } F dV = \int\int\int_E 0 dV = 0.$$