UFSC - CÁLCULO C - 2014.1 - 2A. PROVA B

RAPHAEL DA HORA

(1) Determine a solução do problema (1,5 ponto)

$$t^2\frac{dy}{dt} + 3ty = 5\text{sen } t^2, \quad y(\pi/2) = 1.$$

(2) Determine a solução do problema (1,0 ponto)

$$yy' = -2t - 2ty^2, \quad y(0) = 1.$$

(3) Determine a solução geral do problema (1,0 ponto)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2 + x^2}{x^2}.$$

(4) Determine a solução geral da equação de Riccati (1,5 ponto)

$$y' = -\frac{1}{t^2} - \frac{y}{t} + y^2.$$

(Dica: use a substituição $y = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{v(t)}$.)

(5) Determine a solução do problema (1,5 ponto)

$$1 - y\text{sen } t + y' \cos t = 0, \quad y(0) = 1.$$

(6) Determine a solução do problema (1,0 ponto)

$$y'' + 4y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

(7) Determine a solução geral do problema (1,0 ponto)

$$y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

(8) Dado que $y_1(t) = t^{-1}$ é uma solução de (1,5 ponto)

$$t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0,$$

encontre uma solução da forma $y_2(t) = u(t)y_1(t)$.

SOLUÇÃO

(1) Dividindo por t^2 obtemos
$$y' + \frac{3}{t}y = \frac{5\text{sen}t^2}{t^2}.$$
Essa equação está na forma $y' + p(t)y = g(t)$, e o fator integrante é dado por
$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{t}dt} = e^{3\ln|t|} = t^3.$$
Logo multiplicando a equação por $\mu(t) = t^3$ obtemos
$$\frac{d}{dt}(t^3y) = \frac{5\text{sen}t^2}{t^2}t^3 = 5t\text{sen}t^2 \Rightarrow y = \frac{5}{t^3}\int t\text{sen}t^2dt = \frac{5}{t^3}(-\frac{\cos t^2}{2} + C),$$
onde para calcular a última integral usamos a substituição $u = t^2$, $du = 2tdt$. Como $y(\pi/2) = 1$, temos que
$$1 = \frac{5}{(\pi/2)^3}(-\frac{\cos(\pi/2)^2}{2} + C) \Rightarrow C = \frac{\pi^3}{40} + \cos\frac{\pi^2}{4}.$$
Portanto
$$y(t) = \frac{5}{t^3}\left(-\frac{\cos t^2}{2} + \frac{\pi^3}{40} + \cos\frac{\pi^2}{4}\right).$$

(2) Temos que
$$yy' = -2t - 2ty^2 = -2t(1+y^2),$$
que é uma equação separável. Logo
$$\int \frac{y}{1+y^2}dy = \int -2tdt,$$
onde a primeira integral (a do lado esquerdo) resolvemos pela substituição $u = 1 + y^2$, $du = 2ydy$. Obtemos
$$\frac{\ln|1+y^2|}{2} = -t^2 + C \Rightarrow y = Ke^{-2t^2}, \quad K = e^{2C}.$$
Como $y(0) = 1$, temos
$$1 = Ke^0 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow y = e^{-2t^2}.$$

(3) Vemos que usando a substituição $v = y/x$, i.e., $y = xv$, $y' = v + xv'$, obtemos
$$v + xv' = \frac{x^2v + x^2v^2 + x^2}{x^2} = v + v^2 + 1 \Rightarrow v' = \frac{1+v^2}{x},$$
que é uma equação separável. Temos então
$$\int \frac{1}{1+v^2}dv = \int \frac{1}{x}dx.$$
Segue então que
$$\arctan v = \ln|x| + C \Rightarrow v = \tan(\ln|x| + C).$$

Agora como $v = y/x$, obtemos
$$y = x\tan(\ln|x| + C).$$

(4) Usando a substituição $y(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{v(t)}$, $y' = -\dfrac{1}{t^2} - \dfrac{v'}{v^2}$, obtemos
$$-\frac{1}{t^2} - \frac{v'}{v^2} = -\frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{v}\right) + \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{v}\right)^2 = -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{tv} + \frac{1}{v^2}.$$
Multiplicando tudo por v^2
$$-\frac{v^2}{t^2} - v' = -\frac{v^2}{t^2} + \frac{v}{t} + 1 \Rightarrow v' + \frac{v}{t} = -1.$$
Calculando o fator integrante
$$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}dt} = e^{\ln t} = t,$$
obtemos
$$v(t) = -\frac{1}{t}\int \frac{1}{t}dt = -\frac{1}{t}(\ln|t| + C).$$
Agora como $y(t) = \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{v(t)}$, temos
$$y(t) = \frac{1}{t} - \frac{t}{\ln|t| + C}.$$

(5) Vemos que se $M(t,y) = 1 - y\text{sen}\, t$ e $N(t,y) = \cos t$, então $M_y = -\text{sen} t = N_t$, logo a equação é exata. Queremos então encontrar $f(t,y)$ tal que $\nabla f(t,y) = M(t,y)\mathbf{i} + N(t,y)\mathbf{j}$ e a solução geral é dada por $f(t,y) = K$. Temos então
$$\frac{\partial f}{\partial t} = 1 - y\text{sen}\, t, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \cos t$$
$$\Rightarrow f(t,y) = \int (1 - y\text{sen}\, t)dt = t + y\cos t + C(y)$$
$$\Rightarrow \cos t = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(t + y\cos t + C(y)) = \cos t + C'(y)$$
$$\Rightarrow C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C \text{ (constante)}.$$
Portanto $f(t,y) = t + y\cos t$ e a solução geral é $t + y\cos t = K$. Como $y(0) = 1$, temos
$$0 + 1\cos 0 = K \Rightarrow K = 1.$$
A solução é então dada por
$$t + y\cos t = 1 \Rightarrow y = \frac{1-t}{\cos t}.$$

(6) Temos que o polinômio característico da equação dada é
$$r^2 + 4r = r(r+4),$$

cujas raízes são $r = 0$ e $r = -4$. Segue então que a solução geral da equação dada é

$$y(t) = c_1 + c_2 e^{-4t}.$$

Como $y(0) = 0$ e $y'(0) = 1$, temos

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \text{e} \quad -4c_2 = 1 \Rightarrow c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{1}{4}(1 - e^{-4t}).$$

(7) Temos que o polinômio característico da equação dada é

$$r^2 + 9 = (r - 3i)(r + 3i),$$

cujas raízes são $r = \pm 3i$. Segue então que a solução geral da equação dada é

$$y(t) = c_1 \mathrm{sen} 3t + c_2 \cos 3t.$$

Como $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$, temos

$$c_2 = 1 \quad \text{e} \quad 3c_1 = 0.$$

Portanto a solução é

$$y(t) = \cos 3t.$$

(8) Queremos uma solução da forma $y_2(t) = u(t)y_1(t) = t^{-1}u$. Logo

$$y_2 = t^{-1}u, \quad y_2' = -t^{-2}u + t^{-1}u', \quad y_2'' = 2t^{-3}u - 2t^{-2}u' + t^{-1}u''$$

$$t^2 y_2'' + 3t y_2' + y_2 = t^2(2t^{-3}u - 2t^{-2}u' + t^{-1}u'') + 3t(-t^{-2}u + t^{-1}u') + t^{-1}u = 0$$

$$\Rightarrow tu'' + u' = 0 \Rightarrow u'' - \frac{1}{t}u' = 0 \Rightarrow u'' = \frac{u'}{t},$$

fazendo $w = u'$, temos

$$w' = \frac{w}{t} \Rightarrow \int \frac{1}{w} dw = \int \frac{1}{t} dt \Rightarrow \ln|w| = \ln|t| + k_1 \Rightarrow w = \tilde{c}_1 t$$

$$\Rightarrow u' = \tilde{c}_1 t \Rightarrow u = c_1 t^2 + c_2.$$

Logo

$$y_2(t) = c_1 t + \frac{c_2}{t}.$$