UFSC - CÁLCULO C - 2014.1 - 3A. PROVA A

RAPHAEL DA HORA

(1) Determine a solução geral da equação diferencial (1,5 ponto)
$$y'' - 5y' + 6y = -e^{2t}$$

(2) Determine uma solução particular para a equação diferencial (1,0 ponto)
$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2t}, \quad 0 < t < \pi/4.$$

(3) Determine a solução geral da equação diferencial (1,0 ponto)
$$y''' - y'' - y' + y = 32e^{3t}.$$
Dica: $r^3 - r^2 - r + 1 = (r-1)^2(r+1)$.

(4) Sabendo que a solução geral de $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = 0$ em $t > 0$ é $c_1t + c_2te^t$, então encontre uma solução particular de $t^2y'' - t(t+2)y' + (t+2)y = t^3$. (1,5 ponto)

(5) Encontre a solução geral de $y^{(4)} - 16y = 0$. (1,0 ponto)

(6) Encontre a solução de $y'' + y = u_{\pi/2}(t)$, satisfazendo $y(0) = 0,$, $y'(0) = 0$. (1,5 ponto)

(7) Encontre a solução de $y'' - 3y' + 2y = \delta(t-2)$, satisfazendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (1,0 ponto)

(8) Encontre a solução de $y'' + 4y = \delta(t-1)$, satisfazendo $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. (1,5 ponto)

SOLUÇÃO

(1) Temos que a o polinômio característico é dado por

$$r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3).$$

Portanto a solução da equação homogênea $y'' - 5y' + 6y = 0$ é $c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$. Pelo método dos coeficientes indeterminados devemos então tentar encontrar uma solução do tipo $Y(t) = Ate^{2t}$. Segue que

$$Y(t) = Ate^{2t}, \quad Y'(t) = A(1+2t)e^{2t}, \quad Y''(t) = A(4+4t)e^{2t}$$

$$\Rightarrow Y'' - 5Y' + 6Y = A(4-10+6)te^{2t} + A(4-5)e^{2t} = -Ae^{2t}.$$

Logo $-Ae^{2t} = -e^{2t} \Leftrightarrow A = 1$. A solução geral é dada então por

$$c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + te^{2t}.$$

(2) Temos que a o polinômio característico é dado por

$$r^2 + 4 = (r-2i)(r+2i).$$

Portanto a solução da equação homogênea $y'' + 4y = 0$ é $c_1 \mathrm{sen} 2t + c_2 \cos 2t$. Segue do método de variação de parâmetros que a solução geral da equação diferencial $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2t}$ é dada por

$$y(t) = -\mathrm{sen}2t \int \frac{\cos 2t}{W(t)} \frac{1}{\cos 2t} dt + \cos 2t \int \frac{\mathrm{sen}2t}{W(t)} \frac{1}{\cos 2t} dt,$$

onde $W(t)$ é o Wronskiano de $\mathrm{sen}2t$ e $\cos 2t$, que é dado por

$$W(t) = \begin{vmatrix} \text{sen2t} & \text{cos2t} \\ \text{2cos2t} & \text{-2sen2t} \end{vmatrix} = -2(\mathrm{sen}^2 2t + \cos^2 2t) = -2.$$

Logo

$$y(t) = \frac{\mathrm{sen}2t}{2} \int dt - \frac{\cos 2t}{2} \int \frac{\mathrm{sen}2t}{\cos 2t} dt$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{\mathrm{sen}2t}{2}(t + c_1) - \frac{\cos 2t}{2} \left(-\frac{\ln \cos 2t}{2} + c_2 \right).$$

Temos então que uma solução particular é dada por

$$y(t) = \frac{t\mathrm{sen}2t}{2} + \frac{\cos 2t \ln \cos 2t}{4}.$$

(3) Temos que a o polinômio característico é dado por

$$r^3 - r^2 - r + 1 = (r-1)^2(r+1).$$

Portanto a solução da equação homogênea $y''' - y'' - y' + y = 0$ é $c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t}$. Pelo método dos coeficientes indeterminados devemos então tentar encontrar uma solução do tipo $Y(t) = Ae^{3t}$. Segue que

$$Y(t) = Ae^{3t}, \quad Y'(t) = 3Ae^{3t}, \quad Y''(t) = 9Ae^{3t}, \quad Y'''(t) = 27Ae^{3t}$$

$$\Rightarrow Y''' - Y'' - Y' + Y = (27 - 9 - 3 + 1)Ae^{3t} = 16Ae^{3t}.$$

Logo $16Ae^{2t} = 32e^{3t} \Leftrightarrow A = 2$. A solução geral é dada então por

$$c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t} + 2e^{3t}.$$

(4) Segue do método de variação de parâmetros que a solução geral da equação diferencial $y'' - \dfrac{(t+2)}{t}y' + \dfrac{(t+2)}{t^2}y = t$ (dividindo a equação dada por t^2) é dada por

$$y(t) = -t\int \frac{te^t}{W(t)}tdt + te^t\int \frac{t}{W(t)}tdt,$$

onde $W(t)$ é o Wronskiano de t e te^t, que é dado por

$$W(t) = t(t+1)e^t - te^t = t^2e^t.$$

Logo

$$y(t) = -t\int dt + te^t\int e^{-t}dt = -t(t + c_1) + te^t(-e^{-t} + c_2).$$

Temos então que uma solução particular é dada por

$$y(t) = -t^2 - t.$$

(5) Temos que a o polinômio característico é dado por

$$r^4 - 16 = (r^2 - 4)(r^2 + 4) = (r - 2)(r + 2)(r - 2i)(r + 2i).$$

Portanto a solução da equação homogênea $y^{(4)} - 16y = 0$ é

$$c_2e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3\text{sen}2t + c_4\cos 2t.$$

(6) Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_{\pi/2}\}$$

$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + \mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{u_{\pi/2}\}$$

$$\Rightarrow (s^2 + 1)\mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-\pi s/2}}{s} \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-\pi s/2}}{s(s^2 + 1)}.$$

Usando frações parciais, temos

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{a}{s} + \frac{bs + c}{s^2 + 1} \Rightarrow \frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{(a + b)s^2 + cs + a}{s(s^2 + 1)},$$

encontramos então $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$. Logo

$$\mathcal{L}\{y\} = e^{-\pi s/2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right).$$

Consultando a tabela, vemos que

$$y(t) = u_{\pi/2}(t)(1 - \cos(t - \pi/2)) = u_{\pi/2}(t)(1 - \mathrm{sen} t).$$

(7) Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-2)\}$$
$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) - 3(s\mathcal{L}\{y\} - y(0)) + 2\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-2)\}$$
$$\Rightarrow (s^2 - 3s + 2)\mathcal{L}\{y\} = e^{-2s} + 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-2s}+1}{s^2-3s+1}.$$

Usando frações parciais, temos

$$\frac{1}{s^2-3s+2} = \frac{1}{(s-2)(s-1)} = \frac{a}{s-2} + \frac{b}{s-1} = \frac{(a+b)s - a - 2b}{(s-2)(s-1)}.$$

Encontramos então $a = 1$ e $b = -1$. Logo

$$\mathcal{L}\{y\} = e^{-2s}\left(\frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}\right) + \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1}.$$

Consultando a tabela, vemos que

$$y(t) = u_2(t)(e^{2(t-2)} - e^{t-2}) + e^{2t} - e^t.$$

(8) Aplicando a transformada de Laplace temos

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$
$$\Rightarrow s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\delta(t-1)\}$$
$$\Rightarrow (s^2+4)\mathcal{L}\{y\} = e^{-s} + 1 \Rightarrow \mathcal{L}\{y\} = \frac{e^{-s}+1}{s^2+4}.$$

Consultando a tabela, vemos que

$$y(t) = \frac{1}{2}\left(u_1(t)\mathrm{sen}2(t-1) + \mathrm{sen}2t\right).$$