Cálculo 3 — Lista 2
Mais integrais duplas

---

1) Calcule as seguintes integrais mudando para coordenadas polares:

a) $\displaystyle\iint_D (2x - y)\, dA$, em que D é a região do primeiro quadrante interior ao círculo de centro na origem e raio 2, e entre as retas $x = 0$ e $y = x$.

b) $\displaystyle\iint_D \operatorname{sen}(x^2 + y^2)\, dA$, em que D é a região do primeiro quadrante entre os círculos $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 9$.

c) $\displaystyle\iint_D \operatorname{arctg}(y/x)\, dA$, $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq x\}$.

2) Use coordenadas polares para deduzir a fórmula para o volume de uma esfera de raio r.

3) Uma esfera de raio R é perfurada por uma broca de raio r ($r < R$). O furo passa pelo meio da esfera e a atravessa completamente. Determine o volume do sólido remanescente.

4) Calcule $\displaystyle\int_0^{1/2} \int_{y\sqrt{3}}^{\sqrt{1-y^2}} xy^2\, dx dy$.

5) Calcule o valor médio de $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ na região definida por $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$.

6) Determine a massa e o centro de massa do objeto que ocupa a região D especificada e cuja densidade é dada pela função ρ.

a) $D = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 3,\ 1 \leq y \leq 4\}$, $\rho(x, y) = y^2$.

b) D é o triângulo com vértices $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$, $\rho(x, y) = x + y$.

c) D é limitada pelas curvas $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $\rho(x, y) = xy$.

Respostas

1)

a) $\dfrac{2^{9/2}-24}{3\sqrt{2}}$

b) $\pi(\cos(1)-\cos(9))/4$

c)

2) Chamemos de R o raio da esfera, para não confundir com o r das coordenadas polares. O hemisfério "norte" da esfera é dado por $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$, logo

$$\frac{V}{2}=\int_0^{2\pi}\int_0^R\sqrt{R^2-(r\cos\theta)^2-(r\operatorname{sen}\theta)^2}r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\,dr\,d\theta.$$

Fazendo a substituição $u=R^2-r^2$, ficamos com

$$\frac{V}{2}=\int_0^{2\pi}\int_{R^2}^0(-2)u^{1/2}=\frac{2\pi R^3}{3},$$

logo $V=\frac{4\pi R^3}{3}$

3) Este exercício é análogo ao interior. Mas a região de integração para a integral dupla agora se limita a região entre os círculos de raio r e R. O volume obtido é $\dfrac{4\pi(R^2-r^2)\sqrt{R^2-r^2}}{3}$.

4) 1/120

6)

a) 42, $(2, 85/28)$

b) 6, $(3/4, 3/2)$

c) $(1-3e^{-2})/8$, $((e^2-5)/(e^2-3), 8(e^3-4)/(27(e^3-3e)))$