Geometria Euclidiana — Lista 1

No exercício abaixo, assuma como axiomas os 5 postulados de Euclides.

1) Sejam A e B pontos distintos e seja C um ponto entre A e B. Você consegue imaginar um modo de provar que C pertence à reta $\overleftrightarrow{AB}$? Assumindo que podemos provar este fato, você pode provar a partir da definição de semirreta e dos postulados que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$?

Nos exercícios a seguir, assuma apenas os axiomas de incidência.

2) Para cada par dos axiomas de incidência, construa uma interpretação na qual este par de axiomas é verdadeiro mas o terceiro é falso.

3) Para cada uma das interpretações abaixo para os termos indefinidos, verifique quais axiomas de incidência são verdadeiros e quais são falsos:

a) "Pontos" são pontos usuais marcados numa folha de papel, "retas" são círculos completos desenhados no papel, e "incidência" significa que o ponto pertence ao círculo. Há diferença se o papel tem dimensões infinitas ou finitas?

b) "Pontos" são retas no espaço euclidiano tridimensional, "retas" são planos no espaço euclidiano tridimensional e "incidência" siginifica que a reta está contida no plano.

c) Fixe um círculo no plano euclidiano. Interprete "ponto" como sendo um ponto usual no interior do círculo, interprete "reta" como sendo uma corda do círculo, e seja "incidência" a relação usual do ponto pertencer à corda.

4) Em um certo modelo de geometria de incidência, suponha que cada reta possua pelo menos três pontos incidentes. Qual é o menor número de pontos e o menor número de retas que tal modelo pode ter? Se o modelo satisfaz o postulado das paralelas, mostre que o menor número de pontos é 9 e o menor número de retas é 12.

5) Vamos adicionar aos axiomas de incidência os seguintes axiomas:

(i) o postulado das paralelas de Euclides;

(ii) a existência de somente um número finito de pontos;

(iii) a existência de retas r e s tais que o número de pontos incidentes a r é diferente do número de pontos incidentes a s.

Mostre que este sistema axiomático é inconsistente. Mais especificamente, mostre que (i) e (ii) implicam a negação de (iii).