AULA-10 (06/05/2006) SOLUÇÃO NUMÉRICA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS: MÉTODOS DE RUNGE-KUTTA

RESUMO: *Uma dificuldade na solução numérica do PVI*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f(t,y), \quad a \le t \le b \\ y(a) = \alpha \end{cases}, \tag{1}$$

através de métodos baseados no teorema de Taylor é o cálculo de derivadas $f'(t,y(t))$, $f''(t,y(t))$, *etc. Nesta aula mostraremos que as dificuldades do método de Taylor podem ser contornadas usando métodos de Runge-Kutta.*

Teoria: Os métodos de Runge-Kutta são baseados no teorema de Taylor para funções de duas variáveis aplicado à função $f(t,y)$:

$$\begin{aligned} f(t_0+h, y_0+k) = \;& f(t_0,y_0) + h\frac{\partial f}{\partial t}(t_0,y_0) + k\frac{\partial f}{\partial y}(t_0,y_0) + \frac{h^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(t_0,y_0) + \\ & h\,k\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial y}(t_0,y_0) + \frac{k^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(t_0,y_0) + \text{Resto}. \end{aligned} \tag{2}$$

Métodos A idéia dos métodos de Runge-Kutta é usar o resultado em (2) para aproximar as derivadas que aparecem nos métodos baseados na expansão de Taylor de $y(t_{j+1})$ (para funções de uma variável). Para ilustrar a idéia, vamos lembrar que se u_j denota a aproximação para $y(t_j)$, o **método de Taylor de Ordem 2 (Aula-9)** é da forma

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \quad \text{(condição inicial)} \\ u_{j+1} = u_j + hf(t_j,u_j) + \frac{h^2}{2}f'(t_j,u_j), \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \end{cases} \tag{3}$$

Um método de Runge Kutta de ordem 2 é obtido usando um polinômio de Taylor em duas variáveis de grau um (veja (2)) da função de $af(t_j+b, u_j+c)$ para aproximar $f(t_j,u_j) + \frac{h}{2}f'(t_j,u_j)$ em (3), procurando constantes a, b, c de modo que o erro de truncamento seja $0(h^2)$. Feito isso prova-se que as constantes a, b, e c devem ser $a = 1$, $b = h/2$, e $c = \frac{h}{2}f(t_j,u_j)$. O método obtido é :

Método do Ponto Médio

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \quad \text{(condição inicial)} \\ u_{j+1} = u_j + hf(t_j + \frac{h}{2}, u_j + \frac{h}{2}f(t_j,u_j)), \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \end{cases} \tag{4}$$

Um outro método obtido seguindo um raciocínio análogo (envolvendo 4 parâmetros) é:

Método de Heun:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha, \quad \text{(condição inicial)} \\ u_{j+1} = u_j + \frac{h}{4}[f(t_j,u_j) + 3f(t_j + \frac{2}{3}h, u_j + \frac{2}{3}hf(t_j,u_j))], \quad j = 0,1,\ldots,n-1. \end{cases} \tag{5}$$

Prova-se teoricamente que ambos os métodos atingem uma precisão $O(h^2)$.

Exercício

1. Considere o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = y - t^2 + 1, \quad 0 \le t \le 3 \\ y(0) = 1/2 \end{cases} \tag{6}$$

   Implemente computacionalmente os método de Runge-Kutta de ordem 2 acima, com $n = 10, 20$, e 50. Calcule o erro $|u_j - y(t_j)|$ usando o fato de que a solução do PVI é $y(t) = (t+1)^2 - e^t/2$. Compare os resultados com aqueles obtidos pelo método da série de Taylor.

Fpolis, 06/05/2006

Fermín S. V. Bazán