Profa. Cristiane - 04/03/2006
Aula 3 - Métodos de Otimização Irrestrita

3.1 - Convexidade (Principais conceitos e resultados)

Definição 1: Um subconjunto $S \subset \Re^n$ é convexo se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in S$ e $\lambda \in [0,1]$ se verifica que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in S$.

Definição 2: Uma função f definida em um convexo S é convexa se, e somente se, para todo $x_1, x_2 \in S$, $\lambda \in [0,1]$ se verifica que

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Se para todo $\lambda \in (0,1)$ e $x_1 \neq x_2$ vale

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

então f é estritamente convexa.

Proposição 3.1 (Funções convexas diferenciáveis): Seja $f \in \mathcal{C}^1$. Então f é convexa em S convexo se, e somente se, para todo $x, y \in S$ é verdade que

$$f(y) \geq f(x) + \nabla^t f(x)(y-x)$$

Proposição 3.2: Seja $f \in \mathcal{C}^2$. Seja $S \subset \Re^n$ convexo tal que $\dot{S}$ não é vazio. Então f é convexa se, e somente se, $\nabla^2 f(x) \geq 0$ para todo $x \in S$.

Proposição 3.3: Seja f uma função convexa definida em S convexo. Então:

(a) O conjunto $\Gamma \subset S$ onde f toma seu valor mínimo é convexo.

(b) Qualquer minimizador local de f é um minimizador global de f.

Proposição 3.4: Seja $f \in \mathcal{C}^1$ convexa, definida em S convexo. Se existe $x^* \in S$ tal que para todo $y \in S$ se verifica que $\nabla^t f(x^*)(y - x^*) \geq 0$ então x^* é um minimizador global de f em S.

3.2 - Convergência Global de Algoritmos de Descida

Para a solução numérica de problemas irrestritos de otimização não-linear utilizam-se algoritmos iterativos de descida.

Iterativos: o algoritmo gera uma série de pontos, cada qual calculado a partir do ponto anterior.

Descida: a função avaliada no novo ponto decresce em valor.

Idealmente: a sequência de pontos gerada pelo algoritmo converge num número finito ou infinito de passos para a solução do problema original.

Inicialização : definição do ponto de partida do algoritmo.

Definição 1: Seja $\Gamma \subset \mathcal{X}$ um conjunto solução dado e seja $\mathcal{A}$ um algoritmo definido sobre $\mathcal{X}$. Uma função contínua real f sobre $calX$ é uma função de descida para Γ e $\mathcal{A}$ se satisfaz

(a) Se $x \notin \Gamma$ e $y \in \mathcal{A}(x)$, então $f(y) < f(x)$

(b) Se $x \in \Gamma$ e $y \in \mathcal{A}(x)$, então $f(y) \leq f(x)$

Exercícios de Fixação:

1) Mostre que se f_1 e f_2 são funções convexas sobre o conjunto convexo S, então $f_1 + f_2$ é convexa sobre S.
2) Mostre que se f é uma função convexa sobre o conjunto convexo S então $a \cdot f$ é convexa sobre S, para todo $a \geq 0$.