AULA-4 (25/02/2006) APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES: O MÉTODO DOS QUADRADOS MÍNIMOS LINEARES (MQML)

RESUMO: *Nesta aula vamos estudar o método de aproximação de funções baseado no critério dos quadrados mínimos lineares (QML). Abordadremos o caso em que os dados são de tipo discreto (dados tabelados) e também o caso contínuo. Mostraremos que a técnica de regressão linear, ferramenta usual em estatística, é um caso especial do método dos QML.*

Metodologia: Explorar a idéia de projeção ortogonal sobre um subespaço de dimensão finita, enfatizando o papel do produto interno num espaço vetorial cuidadosamente escolhido. Em particular, para dados discretos o ambiente de trabalho é o espaço vetorial $I\!R^m$. Para $x, y \in I\!R^m$, o produto interno neste espaço é:

$$< x, y >= x^T y \equiv x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_m y_m. \qquad (1)$$

Já para o caso de dados contínuos, o espaço escolhido é $C[a, b]$: o espaço de funções contínuas. Para $f,\ g \in C[a, b]$, o produto interno é difinido por:

$$< f, g >= \int_a bf(x)g(x)dx. \qquad (2)$$

Indepedendentemente do tipo de dados disponíveis, para aproximar a função f pelo método dos Quadrados Mínimos Lineares, procuramos um vetor g no subespaço $\mathcal{V}$ tal que o resíduo $r = f - g$ seja perpendicular a $\mathcal{V}$, como ilustra a figura

Critério: $r \perp \mathcal{V}$

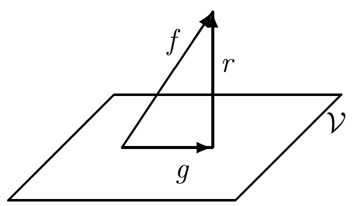

Figura 1: Interpretação Geométrica do Método QML

Na prática, se $\phi_1, \phi_2, \ldots, +\phi_n$ é uma base de $\mathcal{V}$, o vetor procurado g deve ser escrito como

$$g = c_1\phi_1 + c_2\phi_2 + \cdots c_n\phi_n$$

e a tarefa é determinar os coeficientes c_j $(j = 1, \ldots, n)$ de modo que a condição $r = f - g \perp \mathcal{V}$ seja satisfeita. Aplicando o critério, segue facilmente que o vetor de coeficientes c_j's: $c = [c_1, \ldots, c_n]^T$, pode ser encontrado resolvendo-se o sistema de equações lineares

$$Ac = b, \quad [A]_{i,j} =< \phi_i, \phi_j >, \quad b_i =< f, \phi_i >, \quad i, j = 1, n. \qquad (3)$$

Quando isto é feito, o vetor g é chamado *o melhor ajuste* de f no sentido dos quadrados minimos, ou também, *a melhor aproximação* de f em $\mathcal{V}$.

Exercício

1. Encontre a reta de regressão linear dos dados da tabela do exercício da aula anterior (a reta que melhor ajusta a tabela) para prever a posição do automóvel e sua velocidade quando $t = 10s$. Qual o resíduo?

2. Determine um polinômio cúbico da forma $p(x) = c_1x+c_2x^3$ que melhor aproxima $f(x) = sen(\frac{\pi}{4}x)$ no intervalo [0,1]. Calcule também o vetor resíduo.

Fpolis, 25/02/2006

Fermín S. V. Bazán